Автономная некоммерческая образовательная организация высшего
образования «Научно-технологический университет «Сириус»

На правах рукописи



Казанков Владислав Константинович

Моделирование аномалий в замкнутых динамических системах на основе энергетического обмена

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Холодова Светлана Евгеньевна

Федеральная территория «Сириус» — 2026

Оглавление

Введение 4

ГЛАВА 1. Метод моделирования аномальных режимов динамических процессов на основе энергетического обмена между выделенными объёмами среды 12

1.1 Обзор первоисточников и предметной области 13

1.2 Модель динамической системы 18

1.3 Энергетическая оценка 24

1.4 Выводы 30

ГЛАВА 2. Метод обработки временных рядов и моделирование аномалий 32

2.1 Исследование результатов вычислительного эксперимента 36

2.1.1 Анализ частотных характеристик 37

2.1.2 Минимизация целевого функционала 39

2.2 Аномалии в динамике мнений 42

2.2.1 Моделирование динамики мнений с помехами 45

2.2.2 Доказательство существования решения 47

2.2.3 Численное моделирование 48

2.3 Динамика пластических деформаций 51

2.3.1 Эффект Портевена-Ле Шателье 54

2.3.2 Анализ результатов натурного эксперимента 56

2.4 Архитектура программного обеспечения 62

2.4.1 Модель архитектуры 65

2.4.2 Модель сервиса 70

2.5 Выводы 76

ГЛАВА 3. Применение метода к задаче магнитной гидродинамики 77

3.1 Основные направления изучения магнитогидродинамических процессов . . . 77
3.2 Моделирование динамики электропроводящей жидкости . . . 81
3.3 Проведение вычислительных экспериментов . . . 91
3.4 Выводы . . . 100

ГЛАВА 4. Технологии и алгоритмы . . . 102
4.1 Технологии . . . 104
4.2 Алгоритмы . . . 108
4.3 Выводы . . . 113

Заключение . . . 114

Список литературы . . . 117

Приложение А. Акт о внедрении результатов исследования . . . 135

Приложение В. Свидетельство о регистрации программного комплекса . . . 136

Введение

Актуальность исследования. Цифровизация – один из основных трендов современности. Большинство процессов, окружающих людей, имеют некоторое модельное приближение, полученное путем формализации конкретных феноменов. Любое модельное приближение имеет некоторую рациональную предпосылку для своего существования, причем в угоду конкретных целей в моделях принимаются намеренные упрощения.

Какой бы при этом ни была модель и порождающая ее предметная область, важную роль играет класс моделей, содержащих в себе параметризированный набор собственных состояний. Данный класс моделей используется в основном для прогностических целей и позволяет решать большинство практических задач, описывающих явления в течение времени. Как уже было отмечено ранее, модель, описывающая интересующий феномен, создается при некоторых предпосылках, и как итог, сама модель может недостаточно хорошо описывать исходный феномен в каком-то аспекте, что способно приводить к не очевидным последствиям. Например, линейная теория волн, как модель, не могла полностью объяснить существование такого известного природного явления как «волны-убийцы»; в классической электродинамике не удается через уравнения Максвелла описать возникновение шаровой молнии; в теории временных рядов любое значение, превосходящее на несколько порядков скользящее среднее, принято считать «выбросом», но не всегда очевидно как именно отличить «выброс» от большого значения, способного существенно повлиять на поведение всей системы. На практике же, если происходит фиксирование фактов, не вписывающихся в парадигму устоявшейся модели, то такие явления принято называть аномалиями.

Степень разработанности темы исследования. Изучение возникновения аномальных явлений подпитывается возрастающим интересом как к созданию более точных моделей, так и новых инструментов диагностики и предсказания возможных отклонений от нормального функционирования систем. Например, в океанах возникают аномально большие волны. Они могут иметь разные формы и

профили, но есть и характерные черты: внезапное возникновение, сравнительно малый временной промежуток жизни и огромный разрушительный потенциал. Этот феномен получил название волны-убийцы, ключевые исследования данного феномена проводились в работах Захарова В.Е., Пелиновского Е.Н., Дьяченко А.И., Куркина А.А. и других российских ученых. Исследование феномена волн-убийц не ограничилось только гидродинамикой, так волны-убийцы были найдены при решении обобщенного уравнения Хироты, что свидетельствует о существовании их в физико-химических и биологических системах, а также в кванто-механических системах, появляясь в результате частных решений уравнений Шредингера.

Следует отметить, что с увеличением объемов автоматизации производственных процессов становится все более важной задача обеспечения надежности работы технических устройств и систем. Аномальные явления могут снижать эффективность работы систем, приводить к авариям и потере производительности. При этом к системе могут быть выдвинуты требования повышенной безопасности, а значит, что возникновение аномальных явлений для них может быть не допустимым.

Моделирование возникновения аномальных явлений позволяет выявлять потенциальные проблемы, подготавливать системы к их возникновению, а также улучшать процессы мониторинга и управления. Подобного рода задачи регулярно возникают на промышленных предприятиях, где недопустимы сбои и остановки производства. Например в буровых системах, в виду повсеместного использования буровых систем в нефтегазовой промышленности, наличие скрытых колебаний в системе способно выводить из строя буровые установки, что как раз может быть связанно с возникновением аномалии.

Итак, несмотря на обширные исследования, первичные механизмы возникновения блуждающих волн остаются спорными, и выдвигается множество конкурирующих гипотез, к которым относятся, в частности, динамика столкновений солитонов или хаотические взаимодействия волновых полей, обусловленные воздействием ветра. Отсутствие единой теоретической парадигмы требует разработки специализированного математического аппарата, способного

согласовать эти разные на первый взгляд явления в рамках обобщенной динамической структуры.

Объект исследования. Объектом исследования являются динамические системы, в которых предполагается возможность осуществления измерения количества энергии в некотором фиксированном объеме, что и формирует динамическое состояние в системе.

Предмет исследования. Предметом исследования являются методы имитационного, математического и численного анализов для выделения и представления оценки динамических характеристик объекта исследования.

Цель исследования: повышение предсказательной способности аппаратов, моделирующих динамические системы, выделение и классификация широкого класса существующих динамических систем.

Задачи исследования:

1. Сформулировать постановку задачи математического моделирования аномальных явлений в динамических системах на основе предметной области и выделить существующие методы анализа динамических систем.
2. Разработать математический метод для проведения моделирования и анализа динамических систем, позволяющий классифицировать динамические системы и производить их характеристическую оценку.
3. Разработать математический метод исследования произвольных динамических систем, а именно, развить метод оценки динамики в системе, на основе которого разработать алгоритм и численные методы для проведения комплексных исследований и расширить область его применения до анализа произвольных динамических систем.
4. Разработать и реализовать программный комплекс, основанный на алгоритме и численных методах, предназначенный для проведения вычислительных экспериментов с динамическими системами. Оптимизировать алгоритм и численные методы под специфику современных вычислительных систем, разработать программный интерфейс для удобного взаимодействия пользователя в качестве дополнительного инструмента изучения и анализа динамических систем.

5. Осуществить валидацию разработанного программного комплекса, а именно, провести тестирование на корректное поведения программного комплекса при различных пользовательских сценариях, валидировать численные методы и алгоритм.

Научная новизна работы состоит в том, что разработан математический метод, позволяющий классифицировать динамические системы. На основе метода построения классификации становится возможным качественное исследование динамики классифицированной системы. Предложен комбинированный алгоритм, улучшающий поиск корней дисперсионного уравнения с комплексными коэффициентами, что позволило улучшить производительность вычислений. Важным преимуществом предлагаемого метода является учет концепции измерительного датчика на этапе формализации, что позволяет производить оценку динамических операторов.

Представлены примеры применения разработанного метода при решении практических задач из разных предметных областей. Анализ результатов вычислительного эксперимента продемонстрировал возникновение явления инверсии магнитного поля с некоторой периодичностью.

Теоретическая значимость обусловлена предложением нового подхода к моделированию динамики в динамической системе, на основе которого демонстрируется применение разработанного метода для предсказания существования аномальных явлений в системе, а именно, получены необходимые условия существования аномальных явлений и достаточные условия отсутствия возникновения аномальных явлений в динамических системах. Дальнейшее исследование топологий динамических систем и выделение конкретных классов динамических систем могут быть фундаментом для представления новых практических результатов из конкретных предметных областей, а разработка дополнительных математических инструментов на основе предложенного подхода может быть применена в решении широкого спектра производственных задач при проектировании сложных систем, обеспечивая более высокий уровень доверия к системе.

Практическая значимость представленного исследования обеспечена применением разработанного метода и программного комплекса к решению практических задач обеспечения более высокого уровня безопасности систем, представляющих из себя частные случаи динамических систем. Разработанный программный комплекс позволяет проводить вычислительные эксперименты, производить оценки динамических характеристик и классифицировать типы динамических систем, а разработанный метод расширяет научно-практический инструментарий исследователей и проектировщиков динамических систем, способствуя на начальных этапах оценить возможность существования неожиданных состояниях исходной системы (Приложение Б). Представленные методы и комплексы программ используются в работе компании ООО «Тор» (Приложение А).

Методы исследования: анализ динамических систем на основе методов функционального анализа и нелинейной динамики физических процессов, методы редукции системы дифференциальных уравнений, методы построения стохастических дифференциальных уравнений, численный и имитационный анализ математических моделей, методы оптимизации.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод классификации динамических операторов, позволяющий осуществить моделирование аномальных динамических процессов в сплошных средах, основанный на правилах энергетического обмена внутри замкнутой системы, являющийся более общим по сравнению с методами теории динамических систем, но более специализированным, чем методы теории случайных процессов.
2. Теоретическое обоснование алгоритмов детектирования выбросов во временных рядах на основе классификации динамических операторов, включающее выявление необходимых условий существования аномальных явлений и достаточных условий отсутствия возникновения аномальных явлений в динамических системах.
3. Метод обработки временных рядов, позволяющий оценить динамические характеристики системы, сформировавшей исходный ряд, и

спрогнозировать существование аномалий в ней, отличающийся учетом факта существования периодического режима аномальных конфигураций.

4. Численный метод поиска корней дисперсионного уравнения с комплексными коэффициентами в комплексной области, позволяющий осуществить качественный и численный анализ класса динамических систем, отличающийся линейной временной сложностью и улучшающий производительность вычислений на величину порядка 6%.

Соответствие паспорту специальности. В соответствии с паспортом специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» диссертация относится к направлениям исследований:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений
2. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования, алгоритмов и методов имитационного моделирования на основе анализа математических моделей
3. Качественные или аналитические методы исследования математических моделей
4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента

Достоверность научных положении, выводов, практических рекомендаций и аналитических результатов, полученных в ходе диссертационного исследования, подтверждается корректным обоснованием постановок задач, соответствием результатам, полученным в более частных случаях достоверными аналитическими методами, а также результатами вычислительных экспериментов и публикациями в рецензируемых научных изданиях, представлением основных положений в докладах на международных и российских конференциях, положительным опытом внедрения. Проверка алгоритма поиска корней дисперсионного уравнения проведена на случайно сгенерированных тестах и обеспеченна теоретическими выкладками, относящимися к версии алгоритма Иванисова-Полищука. Для анализа и

валидации результатов исследования применялись математические системы MATLAB и Wolfram Mathematica.

Апробация результатов исследования.

Результаты исследования представлены на шести международных и шести всероссийских конференциях: 8-ой Международной научной конференции - школе молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» 2022 (Москва, Россия), Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» 2022 (Санкт-Петербург, Россия), XII Конгрессе молодых ученых ИТМО 2023 (Санкт-Петербург, Россия), 9-ой Международной научной конференции - школе молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» 2023 (Москва, Россия), XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике 2023 (Санкт-Петербург, Россия), XVI Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» 2023 (Саранск, Россия), XIII Конгрессе молодых ученых ИТМО 2024 (Санкт-Петербург, Россия), Международной научной конференции по механике «Десятые Поляховские чтения» 2024 (Санкт-Петербург, Россия), 10-ой Международной научной конференции - школе молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» 2024 (Москва, Россия), XIV Конгрессе молодых ученых ИТМО 2025 (Санкт-Петербург, Россия), 7-ая Школа молодых учёных в рамках Российского форума «Микроэлектроника» (Федеральная территория Сириус, Россия), 11-ой Международной научной конференции - школе молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» 2025 (Москва, Россия).

Внедрение результатов работы. Разработанный программный комплекс внедрен и используется во внутренних пакетах продукта «Элкат» компании ООО «Тор». Успешность внедрения подтверждается соответствующим актом.

Личный вклад автора состоит в выполнении основного объема приведенных в диссертационной работе теоретических исследований и вычислительных экспериментов. Автором лично проведен анализ современных подходов к решению задачи обоснования возможности существования

аномальных явлений в динамических системах, разработан математический аппарат, моделирующий поведение динамической системы с учетом концепции измерительного прибора, разработан и реализован численный метод поиска корней дисперсионного уравнения с комплексными коэффициентами в комплексной области. Подготовка ключевых публикаций проводилась с совместно с соавторами, при этом вклад автора был основным.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 публикациях. Из них три изданы в журналах, рекомендованных ВАК, семь опубликованы в изданиях, индексируемых в базе цитирования Scopus.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ, номер 2025665003 «Программный комплекс для моделирования динамических систем и поиска аномалий».

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Материал изложен на 136 страницах машинописного текста, содержит 127 наименований источников, включает 28 рисунков и 3 таблицы.

ГЛАВА 1. Метод моделирования аномальных режимов динамических процессов на основе энергетического обмена между выделенными объёмами среды

В данной главе особое внимание уделяется обзорному анализу прикладной области, которая является отправной точкой для тестирования и валидации разрабатываемых алгоритмов и методов, а именно, рассматривается моделирование динамических систем, предлагается альтернативный аппарат для моделирования динамики в системе, являющийся более общим по сравнению с методами теории динамических систем, но более специализированным, чем методы теории случайных процессов. Представляется обзор существующих подходов моделирования динамических процессов и построения соответствующих моделей, разнообразие которых наглядно иллюстрирует сложность выбора наиболее эффективного модельного приближения реального физического явления. Возникает необходимость тщательного анализа и выбора наиболее адекватного метода в виду того, что результат использования одной модели упускает из виду то, что доступно для других моделей.

В результате анализа становится ясно, что имеются сложности с применением устоявшихся моделей для поиска в них аномальных явлений, из-за чего возникает необходимость в обобщении похожих, но не одинаковых результатов. Для преодоления этого вызова разрабатывается новый математический аппарат, позволяющий решить поставленную задачу, который используется в качестве основного инструмента в диссертационной работе.

1.1 Обзор первоисточников и предметной области

Динамические процессы являются неотъемлемой частью физического мира. Их математические модели широко используются как в теоретических исследованиях, так и при внедрении передовых технологий в производство. Классическим способом описания динамики в системе является использование аппарата дифференциальных уравнений, но не смотря на этот факт, структура каждой динамической системы состоит из некоторых объектов, их состояний и временного потока, вне зависимости от предметной области. В произвольной динамической системе возможность описания всех ее состояний соответствует полному пониманию набора правил ее функционирования, то есть законов. Существуют различные математические модели динамических систем, но наибольший прикладной и исследовательский интерес представляет существование инструмента, позволяющего производить измерения в системе. Использование математического аппарата в виде измерительного инструмента, как способа характеристической оценки динамики в системе, упрощает ее применение в практическом смысле. Традиционно, аналогом такой характеристики является энергия. С точки зрения теории случайных процессов состояния динамической системы не обязательно имеют одинаковую частоту возникновения, а значит существуют состояния, возникающие как крайне редко, так и довольно часто. При возникновении маловероятного состояния возникает соблазн считать такое состояние аномальным, не свойственным исходной динамической системе, в результате чего формируется систематическая ошибка. Существует несколько способов отличия аномального состояния динамической системы от крайне редкого. Например, можно постулировать, что аномальным состоянием будет являться любое состояние, возникновение которого находится в хвостах ожидаемого распределения некоторой характеристики динамического процесса. Если в таком случае будет зарегистрировано явление, характеристики которого не соответствуют ожидаемому распределению, то принято называть такое явление «выбросом» или ошибкой измерений. В корне другая ситуация

возникает, когда частотное возникновение аномального явления превышает прогнозируемое возникновение, полученное из ожидаемого распределения. Как следствие, возникает понимание, что теория не учитывает некоторые эффекты и имеет ограничение на применение.

Например, в океанах возникают аномально большие волны. Они могут иметь разные формы и профили, но есть и характерные черты: внезапное возникновение, сравнительно малый временной промежуток жизни и огромный разрушительный потенциал. Этот феномен получил название «волны- убийцы». Особенность волн-убийц заключена во внезапности их появления и огромных размерах. Непредсказуемость их появления связана также с тем, что жизненный цикл волны-убийцы представляет из себя периодическое чередование увеличения и уменьшения амплитуды. Феноменологически наблюдение волн-убийц крупного размера может быть обусловлено совокупной энергией всех волн выделенной сплошной среды.

Несколько десятков лет назад волны-убийцы воспринимались как миф. Допускалось только существование экстремальных волн – схожего на первый взгляд явления, появление которого не выходит за рамки статистического распределения случайного ветрового волнения. Прецедентом для независимого изучения волн-убийц стала «Новогодняя волна», зарегистрированная первого января 1995 на нефтяной платформе «Дропнер». Ее появление было неожиданным, а статистические данные с приборов не согласовывались с теорией экстремальных волн [27; 3].

Было разработано несколько различных сценариев, объясняющих причины возникновения волн-убийц. Дело дошло до экспериментов, и впервые волну-убийцу удалось получить в бассейне [83] путем столкновения волн под определенным углом. Классическим способом описания динамики волн является использование аппарата дифференциальных уравнений в частных производных. Как правило, итоговые системы являются частными случаями системы Коши-Ковалевской. Сами уравнения, на первый взгляд, не содержат волны-убийцы, однако в работах [121; 2] удалось показать обратное. С точки зрения случайных процессов нет ничего удивительного в возникновении

аномально больших волн, даже если их статистические показатели выходят за рамки линейной теории, особенно если время протекания процесса достаточно велико.

Вопросы о причинах возникновения волн-убийц поднимаются не только в гидродинамике, но и в других областях. В частности в работе [32] проводится сравнение процессов формирования таких волн в океане и в оптоволокне. Авторы отмечают, что ни линейная, ни нелинейная интерпретации не способны в полной мере объяснить причины возникновения волн-убийц в естественных условиях, а само явление требует более комплексного подхода к изучению. Похожие вопросы рассмотрены в [33], где авторы рассматривают феномен «истинных волн-убийц», возникновение которых не может быть описано существующими теориями. Авторы отмечают, что хотя и рефракционная фокусировка для областей с сильным течением или на мелководье считается вероятной причиной возникновения волн-убийц, их физическое возникновение в открытом океане требует иных подходов и дополнительных исследований, поскольку лабораторные эксперименты не способны полностью отразить непредсказуемую природу волн-убийц в реальных морских условиях.

В работе [38] исследуется формирование обратного каскада энергии в турбулентности второго звука в сверхтекучем гелии II. Показано, что при превышении критического порога возбуждения система становится неустойчивой, и в ней можно обнаружить субгармоники большой амплитуды и низкой частоты — акустических аналогов океанических волн-убийц. Предполагается, что подобные аномальные волны возникают в силу неустойчивости распада периодической волны и приводят к значительному переносу энергии на более низкие частоты. При этом похожие результаты удается представить в исследовании[98], в модели резонансного взаимодействия длинных и коротких волн. Наблюдается связь между поведением этих волн и местами их локализации.

Исследование линейной устойчивости пространственно локализованных состояний и распространения фронтов в многокомпонентной реакционно-диффузионно модели ветвления Майнхардта показало существование в них аномальных явлений [57; 58]. Продемонстрировано, что в одномерном случае локализованные

одно- и многопиковые состояния, формируют разветвлённую последовательность из-за взаимодействия между пиками, но оказываются линейно неустойчивыми, причём число нестабильных мод увеличивается с количеством пиков. Согласованные результаты были представлены в работах [56; 57], при этом отмечается, что возможно существования аномальных явлений в физико-химических и биологических приложениях[21; 106]. К аналогичным заключениям приходят авторы работ [18; 31], изучая возникновение турбулентности в мезомасштабных трубопроводных потоках.

Исследование методов устройства уравнений, описывающих динамику с возникновением волн-убийц проводилось в работах [103] и [77]. В частности, в статье [103] исследуется задача билинеаризации для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, сводя постановку задачи к решению обобщенного уравнения Хироты, широко признанного для построения солитонных решений в нелинейной динамике и математической физике. Аналогичные результаты представлены при исследовании нелинейных уравнений методом Хироты, в работах [25; 104] удалось представить решения, которые состояли из солитонов и волн-убийц. Стоит отметить важные аспекты изучения нелинейных динамических систем в направлении изучения уравнения Кадомцева–Петвиашвили, а именно, в работах [117; 125] на основе решений уравнения удается представить графические профили с волнами-убийцами. При этом, в работах [73; 75; 124] исследуются разные задачи, которые решают методами редукции уравнений к иерархии Кадомцева–Петвиашвили, что позволяет построить решения, содержащие волны-убийцы. Моделирование и формирование динамики двумерных локализованных аномальных структур в уравнении Дейви–Стюартсона I в работах [99] и [46] также показало возникновение вол-убийц, так как для анализа решений используется подход, основанный на многокомпонентных τ-функциях и методе редукции к иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Аналогичные результаты представлены в работе [45], в которой авторы рассматривали уравнение Чен–Ли–Лю, описывающее распространение оптических импульсов в средах с учётом высших порядков дисперсии и квинтической нелинейности. С помощью преобразования

Дарбу построены различные типы решений на фоне периодических и двумерно-периодических структур: периодические волны, солитоны, брихтеры, волны-убийцы и их смешанные состояния, при этом представлен результат моделирования, описывающий механизмы перехода между различными типами аномальных волн, в частности, превращение брихтеров и волн-убийц в солитонные структуры [126].

Аномальные волновые явления принято исследовать через механизм взаимодействия солитонов, а именно, в поиске решений уравнения Кортевега–де Фриза [88; 107; 123], где демонстрируется связь между солитонной турбулентностью и волнами-убийцами. При этом в работе [111] предполагается возможность существования волн-убийц в атмосфере, так как атмосферные условия способны поддерживать формирование аномально высоких и локализованных волн [110].

В работах [39; 45; 118; 126] исследуется моделирование аномальных явлений и волн-убийц в рамках (2+1)−мерной обобщённой и асимметричной системы Нижника–Новикова–Веселова. Авторы используют билинейные методы, полиномы Белла и бинарные преобразования Дарбу для построения аналитических, рациональных и полурациональных решений, описывающих бризеры, солитоны и волны-убийцы. Особое внимание уделяется анализу сценариев взаимодействия локализованных структур, включая рассеяние импульсов, процессы деления и слияния, а также формирование тёмных волн-убийц в виде последовательностей линейных солитонов, переходящих в сильно локализованные аномальные возмущения.

Следует отметить, что удается заметить факт возникновения вол-убийц в системах, описываемых нелинейными уравнениями, соответствующих моделям квантовой механики [87; 112; 115], определяемый структурой решений самих уравнений. Так, частные решения уравнений Шредингера нелинейного вида дают необходимые, с точки зрения математического моделирования, структуры для построения модели волн-убийц [23; 67].

Применение численных [24; 34] и аналитических [24; 41] методов в исследовании нелинейных динамических системах не дает однозначного ответа о

причине возникновения аномалией, при этом, в каждом частном случае удается продемонстрировать их возникновение.

Отдельный интерес представляет поиск наличия аномальных явлений в динамике буровых систем [71] в виду повсеместного их использования в нефтегазовой промышленности. По всей видимости, наличие скрытых колебаний в системе способно выводить из строя буровые установки, что может быть и связанно с возникновением аномалии.

Обобщая выше перечисленные работы, можно констатировать, что в настоящее время общеизвестно несколько основных направлений исследования волн-убийц: анализ уравнений математической физики вместе со структурой их решения и прогнозирование возникновения волн-убийц.

В данной главе предлагается в подтверждение применимости теории о волнах-убийцах рассмотреть динамическую систему, не подчиняющуюся в явном виде основным гидродинамическим законам. Для структуризации знаний о волнах-убийцах разрабатывается аппарат, обобщающий понятие динамической системы, в котором удается сформулировать необходимые условия существования аномальных явлений, в частности волн-убийц [49].

1.2 Модель динамической системы

Рассмотрим сплошную среду V. Произведем ее разбиение на непересекающиеся объемы v_i, и зафиксируем их. Определим для любого v_i линейный функционал $J_t : V \to W \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, где W множество всех оценок $w_i(t)$, представляющих собой энергетические оценки объемов v_i в момент времени t; $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}-$ множество действительных неотрицательных чисел; параметр $t \in T \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ описывает непрерывное время. Энергетические оценки объемов v_i в момент времени t определяются по формуле:

$$J_t(v_i) = w_i(t).$$

Тогда для любого t выполняется неравенство

$$\sum_{v_i \in V} J_t(v_i) \leqslant \sup W < \infty.$$

Введем обозначение $H = (V, J_t)$ и будем называть H энергетическим пространством. Конечные последовательности u вида

$$u = (v_j,...,v_i) = ji$$

назовем траекторией энергии из объема v_i в v_j. Далее будем считать, что

$$ij = \begin{cases} ij, & i \neq j, \\ e_{ii} & i = j. \end{cases} \tag{1.1}$$

Рассмотрим множество U всех конечных последовательностей u, определив на нем отношение эквивалентности «$\sim$». Исследуем количественное изменение энергии в последовательности в зафиксированный момент времени t вне зависимости от промежуточных объемов.

Определение. Конечные последовательности $a = (v_j,...,v_i)$ и $b = (v_l,...,v_k)$ принадлежат одному классу эквивалентности $[u] \subset U$, если $v_j = v_l$ и $v_i = v_k$.

Замечание. В этом случае будем считать, что a и b неотличимы друг от друга, и писать $a \sim b$. Введем операцию склейки «$\circ$», такую, что для любых $jk = (v_j,...,v_k), ki = (v_k,...,v_i), ji = (v_j,...,v_i), ij = (v_i,...,v_j) \in U$ верно:

1. $jk \circ ki = ji$,
2. $ij \circ ji = e_{ii}$,
3. $ij \circ e_{jj} = ij$.

В качестве представителя любого класса $[u]$ будем рассматривать последовательность u, состоящую из двух элементов. Через G обозначим множество всех последовательностей состоящих из двух элементов (v_i, v_j). Из определения и свойств односвязного графа заметим справедливость следующего утверждения.

Утверждение. Если для любого i и $c \neq e_{ii}$ существуют $a \neq e_{ii}$ и $b \neq e_{ii}$ такие, что $c = a \circ b$, где $a, b, c \in G$, то $(V, G)-$ полный граф. Из представленного утверждения следует, что рассматриваемая выше система является замкнутой и описывается полным графом.

Определение. Последовательность $u = (v_i, v_j)$ называется связанной в момент времени t, если между элементами v_i и v_j существует обмен энергией в момент времени t.

Пусть в замкнутой динамической системе для любого элемента $w_i(t) \in W$ существует двухпараметрическое семейство замкнутых операторов

$$\mathfrak{D} = D_t^u : W \to W_{u \in G},$$

таких, что при $t = 0$

$$D_0^u = I,$$

и $D \subset C^1(T)$. Результат действия оператора D_t^u характеризует динамику энергии в энергетическом пространстве.

Определение. Пусть $(v_i, v_j)-$ связанная последовательность в момент времени τ. Если при $u = ij = (v_i, v_j)$ выполняется равенство

$$D_t^{ij} J_\tau(v_i) = J_t(v_j),$$

то v_j называется валентной точкой оператора D_t^{ij} в момент времени t при $\tau \leqslant t$.

Если для оператора $D_t^{ij} \in \mathfrak{D}$ существует валентная точка v_j, определим для него норму в энергетическом пространстве H по формуле

$$||D_t^{ij}||_H = |J_t(v_j) - J_\tau(v_i)|.$$

Определение. Циклом назовем класс операторов $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{D}$ таких, что при любых $u \in G, v \in V$ и $D_t^u \in \mathfrak{K}_0$ выполняется равенство

$$||D_t^u||_H = 0,$$

где $\tau \leqslant t$.

Произведём разбиение множества $\mathfrak{D} = \mathfrak{K}_0 \cup \mathfrak{K}_+$, где $\mathfrak{K}_0-$ циклы, а $\mathfrak{K}_+-$ остальные операторы.

Определение. Назовем момент времени τ завершением эпохи, если для оператора $D_\tau \in \mathfrak{K}_+$ справедливо равенство

$$||D_\tau||_H = \sup ||D_t||_H = \sup W.$$

Пример. Пусть $V = \{A, B, C\}$, тогда $G = \{AA, BB, CC, AB, BA, CB, BC, AC, CA\}$. Количество энергии в системе $\sup W = 15$, а $J_\tau(A) = 5, J_\tau(B) = 8, J_\tau(C) = 2, J_t(A) = 7, J_t(B) = 3, J_t(C) = 5-$ энергетические оценки объемов в моменты времени τ и t соответственно.

Тогда $||D_t^{AC}||_H = 0$, $||D_t^{CB}||_H = ||D_t^{BA}||_H = 1, ||D_t^{AA}||_H = ||D_t^{AB}||_H = 2$, $||D_t^{BC}||_H = ||D_t^{CC}||_H = 3, ||D_t^{CA}||_H = ||D_t^{BB}||_H = 5$.

Пусть $\Delta\tau-$ промежуток времени, принимаемый за условную единицу, тогда следующая запись описывает динамический процесс:

$$(D_{n\Delta\tau}(w))^n = J_t(v_i),$$

где $n \in \mathbb{N}$ количество временных интервалов. Величину $\Delta\tau$ также можно интерпретировать как параметр дискретизации времени t, поэтому, если $\Delta\tau \to 0$, то и $n \to \infty$. Среди операторов $D_t \in \mathfrak{K}^+$ возникает упорядоченная иерархия классов операторов $[D_t] = \mathfrak{K}_p$ относительно скорости роста энергетических оценок, где $p-$ порядок скорости роста. Пусть $2\omega \neq 0-$ условная единица измерения энергии $\omega \in \mathbb{R}^+$, которое возможно зарегистрировать, тогда точной верхней гранью класса $\mathfrak{K}_0$ будет представитель класса операторов $\mathfrak{K}_1$ таких, что, если $D_t \in \mathfrak{K}_0 \cap \mathfrak{K}_1$, то

$$||D_t||_H \leqslant (2\omega + \cdots + 2\omega) = 2\omega n = O(n).$$

Так как за каждый условный промежуток времени $\Delta\tau$ количество энергии увеличивается на постоянное значение 2ω, то $\sup \mathfrak{K}_0 = O(n)$.

Рассмотрим $\sup \mathfrak{K}_1$. Полагая, что в момент времени t количество изменения энергии равно 2ω, для любого $D_t \in \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$ будет справедлива оценка

$$||D_t||_H \leqslant 2\omega + 2 \cdot 2\omega + \cdots + n \cdot 2\omega = (2\omega + \omega(n-1))n = \omega(n+1)n = O(n^2),$$

а для любого оператора $D_t \in \mathfrak{K}_2 \cap \mathfrak{K}_3$, такого, что в каждый момент времени изменение количества энергии будет в 2ω раз больше, чем в предыдущей момент времени t верна оценка:

$$||D_t||_H \leqslant 2\omega + (2\omega)^2 + \cdots + (2\omega)^n = \frac{2\omega(1-(2\omega)^n)}{1-2\omega} \leqslant Ae^{\alpha n} = O(e^{\alpha n}),$$

где $A = \dfrac{2\omega}{2\omega - 1}$ и $\alpha = \ln(2\omega)$. Для произвольного оператора D_t из класса $\mathfrak{K}_p$, при $p \geqslant 2$ справедлива оценка

$$||D_t||_H \leqslant \sum_{k=1}^{t} 2\omega \uparrow^{p-1} k,$$

где «$\uparrow^{p-1}$» – обозначение гипероператора в обозначении Кнута [59].

При этом можно сформировать упорядоченную иерархию классов динамических операторов относительно асимптотической скорости роста нормы в энергетическом пространстве H, а именно, справедлива оценка для нормы оператора $D_t \in \mathfrak{K}_p$

$$\sum_{k=1}^{t} 2\omega \uparrow^{p-2} k \leqslant ||D_t||_H \leqslant \sum_{k=1}^{t} 2\omega \uparrow^{p-1} k.$$

Наиболее интересным для детального изучения является класс динамических операторов $\mathfrak{K}_2$ таких, что для любого динамического оператора $D_t \in \mathfrak{K}_2$ верна оценка:

$$\omega(n+1)n \leqslant ||D_t||_H \leqslant \frac{2\omega(1-(2\omega)^n)}{1-2\omega},$$

так принадлежность к этому классу или последующим является необходимым условием существования аномалий в динамической системе. Заметим, что класс операторов $\mathfrak{K}_2$ содержит в себе набор полугрупп операторов D_t, описывающих эволюционный процесс, то есть, существует оператор $D_t(w) = \partial w(t, v^*)/\partial t$, такой, что справедлива следующая запись

$$\frac{\partial w(t, v^*)}{\partial t} = J_t(v_i),$$

где v^*- некоторый зафиксированный объем.

Пусть далее поведение оператора D_t, в момент времени t зависит только от момента $t - \Delta\tau$. Тогда оператор D_t можно трактовать как марковский процесс.

Определение. Аномалией в динамической системе будем называть энергетическую оценку объема v, такую, что амплитудный критерий $\mu(v) \geqslant \mu_0$, при этом в дальнешем будем полагать что $\mu_0 = 2.1$ для гидродинамической

системы [89; 105]. Амплитудный критерий для гидродинамической системы может быть представлен следующей формулой:

$$\mu(v) = \frac{||D_t||_H}{\frac{1}{M}\sum_{\tau\in M}||D_\tau||_H},$$

где $||D_t||_H-$ отображает оценку в объеме v, которая в частном случае может является высотой волны в момент времени t, $M-$ множество, содержащие треть самых больших оценок, возникших до момента времени t. Пусть динамическая система не задается оператором из класса циклов, тогда верна следующая оценка:

$$\frac{1}{M}\sum_{\tau\in M}||D_\tau||_H \leqslant \frac{||D_{t-1}||_H + ||D_{t-2}||_H}{2}.$$

Тогда для амплитудного критерия μ верна оценка:

$$\mu \geqslant \frac{2||D_t||_H}{||D_{t-1}||_H + ||D_{t-2}||_H}. \tag{1.2}$$

Теорема. Любой оператор $D_t \in \mathfrak{K}_2$ задает динамический процесс, в котором могут возникать при $\mu_0 = 2.1$.

Доказательство. Пусть до момента времени t было получено две энергетические оценки, а минимально измеримое количество энергии $\omega = 1$, тогда на основе неравенства (1.2) – следствия амплитудного критерия для оператора $D_t \in \mathfrak{K}_2$,– получим нижнюю грань его числовой характеристики в энергетическом пространстве:

$$\frac{2||D_t||_H}{||D_{t-1}||_H + ||D_{t-2}||_H} \geqslant \frac{2||D_t||_H}{2\max(||D_{t-1}||_H, ||D_{t-2}||_H)} \geqslant \frac{||D_t||_H}{||D_{t-1}||_H} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(2\omega-1)(t+1)t}{2\exp((t-1)\ln 2\omega)}\bigg|_{t=3,\omega=1} = \frac{4\cdot 3}{2\exp(2\ln 2)} = 1.5.$$

Рассмотрим верхнюю оценку:

$$\frac{2||D_t||_H}{||D_{t-1}||_H + ||D_{t-2}||_H} \leqslant \frac{2||D_t||_H}{2\min(||D_{t-1}||_H, ||D_{t-2}||_H)} \leqslant \frac{||D_t||_H}{||D_{t-2}||_H} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\exp(t\ln 2\omega)}{(2\omega-1)(t-1)(t-2)}\bigg|_{t=3,\omega=1} = \frac{2\exp(3\ln 2)}{2} = 8.$$

Так как верхняя оценка числовой характеристики амплитудного критерия больше, чем μ_0 а нижняя меньше чем μ_0, то значит значение амплитудного критерия μ может превышать μ_0, следовательно, в динамической системе могут возникать аномальные явления. Из доказательства теоремы следует:

Следствие. Необходимое условие существования аномалии в динамической системе при $\mu_0 = 2.1$. Если существует возможность возникновения аномалии в динамической системе, то динамический оператор $D_t \in \mathfrak{K}_p$, где $p \geqslant 2$.

Следствие. Достаточное условие отсутствия возникновения аномальных явлений в динамической системе, при $\mu_0 = 2.1$. Если динамический оператор $D_t \in \mathfrak{K}_p$, где $p \in \{0, 1\}$, то в динамической системе не возникает аномальных явлений.

1.3 Энергетическая оценка

Пусть $H(x, y, t) = H_0(x, y) + \eta(x,y,t)$, где $H_0(x,y)-$ толщина жидкого слоя в состоянии покоя, а $\eta(x,y,t)-$ малое возмущение.

Пусть $\eta = Re\,(\eta_0 \exp(-i(kx + ly - \sigma t)))-$ плоская волна, η_0- амплитуда колебания, $\Theta = kx + ly - \sigma t_0-$ фаза при фиксированном t_0. Тогда возвышения поверхности постоянны на линиях, образованных из равенства

$$kx + ly = const.$$

Пример линий постоянной фазы $-$ гребни волны.

Характеристики плоских волн являются постоянными величинами вдоль линий постоянной фазы. Нормаль $\vec{K}$ линии постоянной фазы задается волновым вектором

$$\vec{K} = \nabla\Theta = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)(kx + ly) = \vec{i}k + \vec{j}y.$$

Расстояние λ по нормали между двумя соседними линиями с одинаковой фазой определяется из условия:

$$\lambda\left|\vec{K}\right| = 2\pi.$$

Следовательно, получаем соотношение, позволяющее вычислять значение длины волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\left|\vec{K}\right|}.$$

Величину длины вектора $\vec{K}$ называют волновым числом. Волновое число соответствует числу колебаний, укладывающихся на единичном отрезке, перпендикулярном гребню.

В любой заданной точке фаза изменяется с течением времени линейно со скоростью $\sigma = -\frac{\partial\Theta}{\partial t}$, где σ равна числу гребней, проходящих через точку в единицу времени.

Фазовая скорость – скорость распространения фазы в направлении $\vec{K}$, то есть, в направлении распространения гребней волны. Величина значения фазовой скорости

$$C = -\frac{1}{|\nabla\Theta|}\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{\sigma}{|\vec{K}|} = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2+l^2}}.$$

Одно из наиболее фундаментальных свойств волн – способность переносить энергию на расстояния, большие по сравнению с характерным смещением частиц жидкости в самой волне. Смещение жидкой частицы за период волны вычисляется следующим образом

$$e_* = O\left(u_*\frac{2\pi}{\sigma_*}\right),$$

где u_*– характерная скорость движения жидкости, примерно пропорциональная амплитуде волны, а σ_*– частота. Следовательно, следующие равенства верны:

$$\frac{e_*}{\lambda_*} = O\left(u_*\frac{|\vec{K_*}|}{\sigma_*}\right) = O\left(\frac{u_*}{C_*}\right).$$

Волна малой амплитуды характеризуется малым значением величины u_*/C_*, что эквивалентно условию относительной малости смещения частицы жидкости в волне. Волна в жидкой среде представляет собой результат совместного действия многих частиц жидкости между собой, испытывающих небольшие, но согласованные смещения на больших пространственных масштабах, за счет чего

происходит передача осцилляции на расстояния, которые на много превосходят смещение каждой отдельной частицы жидкости.

Рассмотрение плоских волн − важный аспект для решения различных вопросов, в частности, для выяснения основного механизма, поддерживающего волновые колебания. Тем не менее, условия строгой периодичности пространства ее амплитуды никогда не соблюдается в природе. Плоская волна − полезное приближенное описание волновой картины, если эта картина медленно меняется в пространстве, однако любой реальный цуг волн имеет начало и конец, как во времени, так и в пространстве. То есть, обычно наблюдается волны, распространяющиеся группами или пакетами. Изучение вопроса распространений возмещений в среде требуют рассмотрения более сложных волновых полей, для которых амплитуда волны меняется в пространстве и времени. Поскольку более сложные волны локально похожи на плоские, то соотношения для плоских волн могут быть полезными и для исследования волновых пакетов.

Простейшим примером ограниченного в пространстве волнового возмущения является волновой пакет, задаваемый в виде

$$\psi = A(x,y,t)\cos(kx + ly - \sigma t),$$

где $A-$ медленно меняющаяся функция от переменных x,y,t то есть,

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} << K, \quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} << K, \quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t} << \sigma,$$

где $K^2 = k^2 + l^2$. Эти условия означают, что на расстоянии порядка длинны волны и за время ее периода амплитуда волны может считаться приблизительно постоянной.

Представляет интерес изучение закона движения огибающей волновых пакетов, поскольку именно амплитуда огибающей определяет, где сосредоточена энергия волн. Пример волнового пакета на рисунке (1.1). Там, где размах огибающей так мал, мала и интенсивность волны.

Огибающая волнового пакета движется со скорость $\overline{C_g}$, которая называется групповой скоростью.

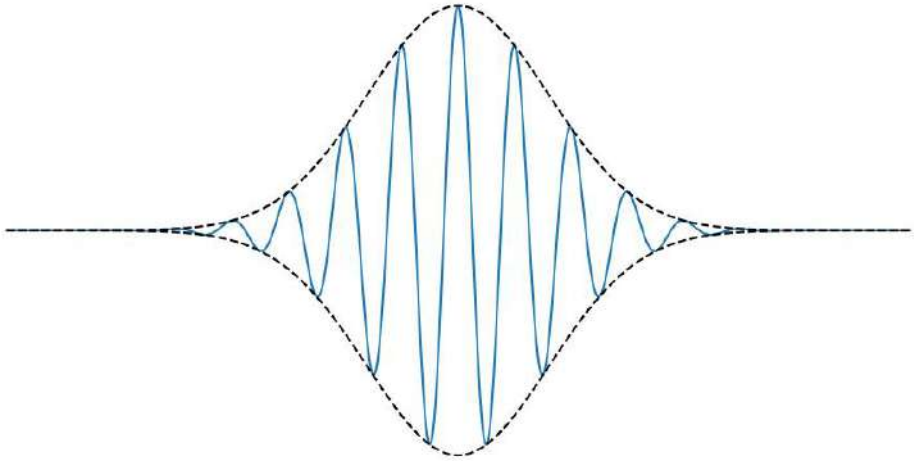


Рисунок 1.1 — Одномерный волновой пакет

$$C_{gx} = \frac{\partial \sigma}{\partial k}, \quad C_{gy} = \frac{\partial \sigma}{\partial l}. \tag{1.3}$$

Тогда справедлива следующая формула:

$$\overline{C_g} = \nabla_K \sigma = \vec{i}\,\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

где $\nabla_K -$ градиент по волновым числам k,l.

Так как $\sigma = |\vec{K}|C$, где $C -$ фазовая скорость или скорость гребня в направление волнового вектора, то

$$\overline{C}_g = \nabla_{\vec{K}} \left(|\vec{K}|C \right) = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|} + |\vec{K}|.$$

Рассмотрим некоторое линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi = 0,$$

где $\mathcal{L} -$ полином относительно временных и пространственных производных.

Если решение этого уравнения $-$ функция

$$\psi = Re\left(A \exp(i(kx + ly - \sigma t)) \right),$$

то амплитуда будет удовлетворять уравнению

$$\mathcal{L}\left(-i\sigma+\frac{\partial}{\partial t},ik+\frac{\partial}{\partial x},il+\frac{\partial}{\partial y}\right)A=0.$$

Если A медленно меняется от x,y,t, то полином $\mathcal{L}$ можно разложить в ряд Маклорена и получить

$$\left(\mathcal{L}\left(-i\sigma,ik,il\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(-i\sigma)}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(ik)}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(il)}\frac{\partial}{\partial y}\right)A=0,$$

где члены более высокого порядка малости отброшены. Все члены этого разложения по малым параметрам

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\quad\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\quad\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y}$$

должны общаться в нуль по отдельности, следовательно, в первом приближении получаем уравнение

$$\mathcal{L}\left(-i\sigma,ik,il\right)=0.$$

Это и есть дисперсионное соотношение для полоской волны. Для того, чтобы следующий член разложения обращался в нуль, необходимо:

$$\frac{\partial A}{\partial t}-\left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k}\right)/\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma}\right)\right)\frac{\partial A}{\partial x}-\left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial l}\right)/\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma}\right)\right)\frac{\partial A}{\partial y}=0.$$

По определению

$$\left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k}\right)/\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma}\right)\right)=-\frac{\partial\sigma}{\partial k}\quad;\left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial l}\right)/\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma}\right)\right)=-\frac{\partial\sigma}{\partial l},$$

следовательно соотношения (1.3) представляют общую формулу для скорости пакета волн произвольного типа. И так, для определения движения волнового пакета необходимо знать только дисперсионное соотношение.

Энергия волны сохраняется и распространяется вместе с пакетом с групповой скоростью. Таким образом, скорость переноса энергии вообще не связана со скоростью распространения гребней и впадин волн, то есть с фазовой скоростью.

Тот факт, что энергия распространяется с групповой скоростью, непосредственно следует также из того, что огибающая пакета волн

распространяется с групповой скоростью. Групповая скорость определяет скорость переноса энергии волнами.

Если в момент времени t в точке x находилась группа волн с амплитудой A, то в момент $t+\tau$ группа волн с амплитудой A будет находится в точке $x+C_g\tau$. Поэтому скорость C_g называют групповой скоростью:

$$\overline{C}_g = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}, \frac{\partial\sigma}{\partial l}\right); \quad |\overline{K}| = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \sigma = |\vec{K}|C,$$

$$\sigma = \frac{2\pi C}{\lambda},$$

тогда справедлива следующая формула:

$$C_g = \frac{d\sigma}{d\vec{K}} = \frac{\lambda dC - C d\lambda}{-d\lambda} = C - \lambda\frac{dC}{d\lambda}.$$

Рассмотрим волны в несжимаемой среде, протекающие под действием силы тяжести. Энергия волн состоит из кинетической энергии движения отдельных частиц жидкости и из потенциальной, происходящей от того, что центр тяжести жидкости при ее волновом движении лежит выше, чем при равновесии.

Вычислим потенциальную энергию, приходящуюся на длину λ. Выберем элемент dx, тогда под осью Ox будет находиться объем жидкости ηdx, масса это объема $\rho\eta dx$. Центр тяжести будет лежать на высоте $\eta/2$, следовательно, потенциальная энергия силы тяжести будет равна

$$\Delta E_p = \rho\eta^2 dx/2.$$

Тогда потенциальная энергия, приходящаяся на длину, λ вычисляется по формуле

$$E_p = \frac{1}{2}\rho g \int_0^\lambda \eta^2 dx.$$

Для стоячих волн в жидкости конечной глубины верны формлуы:

$$\eta = a\sin(Kx)\sin(\sigma t),$$
$$E_k = \frac{\rho a^2 g\lambda}{4}\cos^2(\sigma t),$$

$$E_p = \frac{\rho a^2 g \lambda}{4} \sin^2(\sigma t).$$

Полная энергия $E = E_k + E_p = \frac{\rho a^2 g \lambda}{2}$.

Для прогрессивных волн:

$$\eta = a \cos(kx - \sigma t),$$

$$E_k = E_p = \frac{\rho g a^2 \lambda}{4}.$$

Здесь кинетическая энергия и потенциальная энергия постоянны по отдельности.

Введем формулу: $C_g : C = 2C_g$, следовательно работа, производимая в единицу времени, будет равна

$$W_1 = \frac{1}{2} a^2 g \rho C_g,$$

но

$$\frac{1}{2} a^2 g \rho$$

– полная энергия волн, приходящеюся на единицу длинны. Следовательно, энергия волн переносится со скорость, равной групповой скорости волн.

Следовательно, $E \sim a^2$, где a– амплитуда волны. Этот результат общий для волновых движений.

1.4 Выводы

Из представленного выше можно сделать следующие выводы:

- Проведен анализ существующих методов моделирования динамических систем. В результате анализа выявлена необходимость в обобщении похожих, но не одинаковых результатов и методов моделирования динамических систем с учетом возникновения аномальных явлений.

- Для решения задачи обобщения существующих методов исследований, связанных с возникновением волн-убийц не только в гидродинамических системах, но и в достаточно широком классе динамических систем, предложен аппарат, позволяющий рассматривать волны-убийцы в качестве частного случая возникновения аномального явления в динамической системе.
- Построена классификация динамических операторов, на основе которой получено необходимое условие существования аномальных явлений в классах динамических систем и достаточное условие отсутствия возникновения аномалий в динамической системе.
- Получено соотношение, связывающее высоту плоско-параллельной волны с оценкой количества переносимой ею энергией.

Дальнейшие исследование в следующих главах направленно на поиск аномальных явлений, возникающих в приложениях динамических систем.

ГЛАВА 2. Метод обработки временных рядов и моделирование аномалий

Временные ряды, представляющие собой последовательности данных, упорядоченных во времени, являются одной из основных форм представления динамики процессов в эмпирических исследованиях. Каждое наблюдение в таком ряду связано с конкретным моментом или интервалом времени, так формируется структурная зависимость между точками данных, отличающая временные ряды от перекрестных данных. Эта временная упорядоченность открывает возможности для изучения не только внутренней структуры данных, но и их эволюции, выявления инерционности, цикличности и иных динамических характеристик исследуемой системы.

Анализ временных рядов служит краеугольным камнем для понимания, моделирования и прогнозирования поведения сложных систем в различных областях, таких как экономика, метеорология, физика, биология и инженерия. Круг задач, решаемых с помощью методологии анализа временных рядов, чрезвычайно широк и простирается от сугубо прикладных до фундаментально-исследовательских. Ключевым направлением является прогнозирование будущих значений на основе ретроспективных данных, идентификация скрытых паттернов, поиск трендов, сезонные и циклические компоненты, а также реконструкция динамики порождающей системы по наблюдаемому сигналу. В рамках более сложных исследований временные ряды используются для обнаружения причинно-следственных связей между несколькими процессами, проверки статистических гипотез о свойствах системы и для построения моделей, адекватно описывающих реальные физические процессы, лежащие в основе измеренного явления.

Существует направление, связанное с задачами классификации и кластеризации рядов, позволяющее выделять типичные режимы функционирования системы и идентифицировать аномалии в ее поведении. Однако применимость методов анализа временных рядов имеет определенные границы, обусловленные как природой самих данных, так и свойствами

исследуемых систем. К основным ограничениям относятся требование к качеству данных, а именно, стационарность, достаточная длина ряда и отсутствие значительных пропусков или систематических ошибок измерений. Многие классические методы теряют свою эффективность при работе с нелинейными, нестационарными или хаотическими системами, а также с рядами, демонстрирующими резкие изменения режимов поведения, также известными как структурные сдвиги. Кроме того, сама дискретная природа регистрации данных накладывает принципиальные ограничения на возможность анализа процессов, протекающих на временных масштабах, меньших интервала наблюдения, что может приводить к явлению наложения частот. Важным концептуальным ограничением является редукция многомерной и потенциально непрерывной динамики системы к одномерному или многомерному конечномерному дискретному ряду, что неизбежно связано с потерей части информации о фазовых траекториях исходной системы.

Особую значимость в контексте прикладных исследований приобретает проблема интерпретируемости моделей временных рядов. С одной стороны, существуют простые и интуитивно понятные модели, такие как экспоненциальное сглаживание, которое позволяет дать четкую трактовку выявленным компонентам, оценить период сезонности или выраженность тренда. С другой стороны, современные методы, основанные на машинном обучении, включая рекуррентные и сверточные нейронные сети, часто демонстрируют высочайшую точность прогноза, но остаются «черными ящиками». Их внутренняя структура и механизм принятия решений сложны для аналитического осмысления, что существенно затрудняет извлечение содержательных знаний о природе изучаемого процесса, устройстве внутреннего механизма динамики, отраженного в данных. Проблема выбора между точностью и интерпретируемостью формирует вызов для исследователя: выбор в пользу сложной модели может привести к потере понимания фундаментальных движущих сил системы, в то время как простая модель может оказаться неадекватной для описания ее сложной динамики. Таким образом, задача построения моделей, сочетающих

прогностическую мощь с возможностью содержательной интерпретации, остается одной из наиболее актуальных в данной области.

В свете указанных вызовов перспективным направлением представляется развитие подходов, позволяющих декомпозировать сложное поведение ряда на интерпретируемые компоненты, даже если сама модель имеет нетривиальную архитектуру. Методы, основанные на внимании, анализе важности признаков, гибридные модели, комбинирующие принципы разных парадигм, открывают пути к частичному преодолению разрыва между точностью и интерпритируемостью результата. Стоит отметить, что одним из важных аспектов остается содержательная верификация результатов, при которой высокая прогнозная точность должна быть дополнена возможностью содержательно объяснить выделенные свойства системы, полученные прогнозы или классификационные решения.

Важным практическим аспектом работы с временными рядами является проблема их нестационарности, которая не только ограничивает применимость многих классических методов, но и требует применения специальных процедур для преобразования данных. К ним относятся операции дифференцирования для устранения тренда, сезонные декомпозиции и использование логарифмических преобразований для стабилизации дисперсии. Однако каждый такой шаг, улучшая статистические свойства ряда, одновременно усложняет содержательную интерпретацию конечных результатов моделирования. Например, прогноз, построенный для продифференцированного ряда, требует обратного преобразования для возвращения в исходную шкалу, что может сопровождаться накоплением ошибок и затруднить понимание динамики исходного процесса. Более того, в реальных задачах часто приходится сталкиваться с мультипликативными эффектами, когда сезонная амплитуда растет вместе с трендом, что требует нетривиальных подходов к моделированию и дальнейшей интерпретации.

Рассматривая задачи, которые успешно решаются методами анализа временных рядов, следует выделить также задачи контроля качества и технической диагностики. Анализ последовательностей измерений с

производственных процессов позволяет в режиме реального времени детектировать разладку, то есть, момент нарушения стационарности технологического процесса, что является сигналом для вмешательства. В медико-биологических исследованиях анализ временных рядов, таких как электроэнцефалограмма или электрокардиограмма, позволяет выявлять патологические паттерны, ассоциированные с различными заболеваниями.

Существует ряд задач, с которыми методы анализа временных рядов справляются плохо, помимо упомянутых ранее, это задачи с сильной неполнотой данных, в них пропуски носят не случайный, а систематический характер, коррелирующий с самим изучаемым процессом. Например, в экономике в периоды кризисов может нарушаться регулярность поступления статистической отчетности, что создает искаженную картину динамики. Не достаточно эффективны стандартные подходы и для прогнозирования процессов, управляемых исключительно внешними, случайный характер которых не позволяет выявить внутренние детерминированные закономерности.

Другим подходом является использование символьной регрессии или генетического программирования для поиска аналитического выражения, которое с заданной точностью аппроксимирует динамику ряда. Результатом такой процедуры является не набор коэффициентов, а формула, потенциально позволяющая выдвигать гипотезы о лежащих в основе процессах. Однако такие методы часто сталкиваются с проблемой переобучения и порождают избыточно сложные выражения, лишенные физического смысла. Таким образом, даже при наличии формальной интерпретируемой структуры ее содержательная интерпретация остается не автоматической, а творческой задачей исследователя, требующей привлечения экспертных знаний из предметной области.

В данной главе применяется разработанный математический аппарат для исследования конкретных динамических систем из разных предметных областей. На примерах использования разработанного математического аппарата удается продемонстрировать новый метод анализа динамических систем. Применение нового метода позволяет сформировать новые гипотезы о законах функционирования динамических систем, а также более детально изучить

устройство динамических систем. В рамках предложенного метода удается исследовать динамические системы через модельное приближение в виде временных рядов.

2.1 Исследование результатов вычислительного эксперимента

Анализ математической модели динамической системы [50], проведенный в первой главе, позволяет сформулировать гипотезу: «Динамический процесс представляется повторяющимися эпохами, каждая из которых является объединением цикла и тенденции, которой соответствует часть эпохи, возникающая в результате ее фильтрации от циклов, при этом аномальные явления (волны-убийцы) рождаются перед завершением эпохи», для подтверждения которой следует перейти к обработке результатов вычислительных экспериментов, которые описанны в работах [6; 7]. Результирующая волнограмма представлена на рисунке (2.1). Ее можно интерпретировать в качестве временного ряда X_t. Тогда оценку высоты каждой волны можно вычислить согласно следующей формуле:

$$J_t = x_{mx} - (x_{mf} + x_{ms})/2,$$

где $x_{mx}-$ высота гребня волны, а x_{mf} и $x_{ms}-$ ближайшие подошвы, окружающие гребень.

На рисунке (2.2) представлен результат преобразования временного ряда X_t в Y_t, который отображает изменение высоты волны с течением времени.

Согласно амплитудному критерию, во временном ряде Y_t зафиксировано 25 аномальных волн, которые при достаточно большом волновом фоне можно назвать волнами-убийцами. Для временного ряда Y_t можно задать оценку локальной равномерности $\mu(U_n)$, как среднеквадратичное отклонение, рассчитанное для множества $U_n \subset Y_t$, где $n-$ количество элементов в множестве U_n.

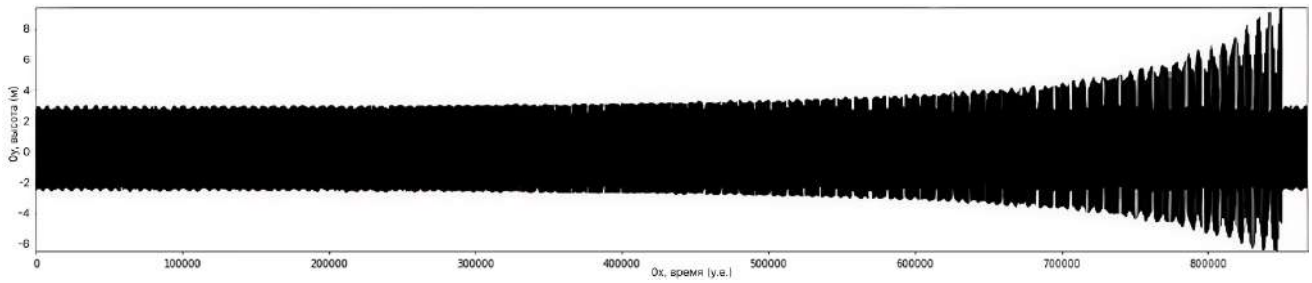


Рисунок 2.1 — Визуализация вычислительного эксперимента

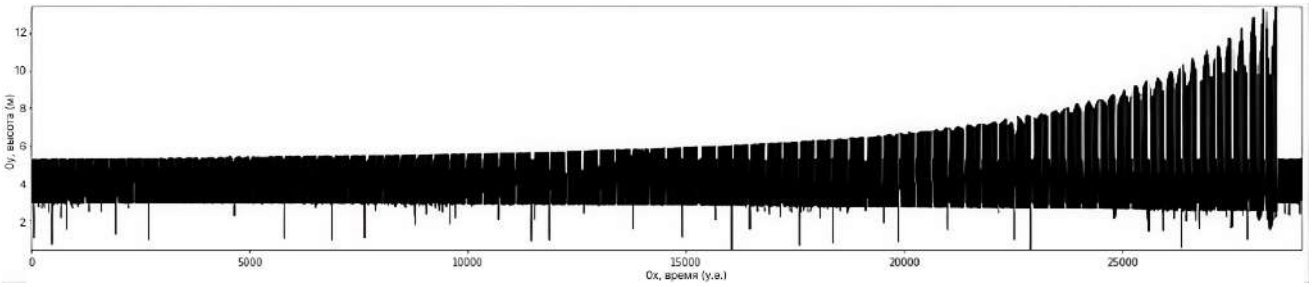


Рисунок 2.2 — Высота волн

Возможны разные подходы к поиску значения числа n. Далее будет рассмотрено два подхода: анализ частотных характеристик, минимизация целевого функционала.

2.1.1 Анализ частотных характеристик

Временной ряд Y_t состоит из 29103 элементов, а волны-убийцы возникали только в моменты времени

$$t = [26925; 27164; 27198; 27232; 27403; ...; 28429; 28463; 28497; 28531].$$

Пусть T_r- множество всех моментов времени возникновения волн-убийц. Рассмотрим множество P, состоящие из временных интервалов, в течение

которых возникали волны-убийцы по следующему правилу:

$$p_i = t_{i+1} - t_i,$$

где t_i,$t_{i+1} \in T_r$. Согласно гипотезе о том, что динамический процесс содержит в себе циклы, следовательно, и возникновение волны-убийцы должно быть систематическим явлением. При этом гораздо важнее, чтобы в каждом цикле была только одна волна-убийца или таковых не было вовсе. Возникает несколько возможных вариантов выбора значения числа n. Пусть $n = 67$, так как усреднение всех элементов множества P с точностью до трех знаков равно 66.917, где $n \in N$. Число 34 часто встречается в множестве P, поэтому стоит рассмотреть случай при $n = 34$. Можно заметить, что среднее значение элементов множества P близко к удвоенному значению самого встречаемого элемента, разложив который на простые числа, получим 17 и 2, следовательно $n = 17$.

На рисунках (2.3 – 2.5) представлены графики $\mu(U_n)$ для $n = 67, 34, 17$. Синим цветом показано изменение значения $\mu(U_n)$, обозначается как «Origin». За «Trend» обозначен результат экспоненциального сглаживания «Origin» с параметром $\alpha = 0.02$. Красная линия отмечает момент регистрации первой волны-убийцы, при этом она начинается со значения показателя $\mu(U_n)$ и заканчивается на максимально возможном значении $\mu(U_n)$.

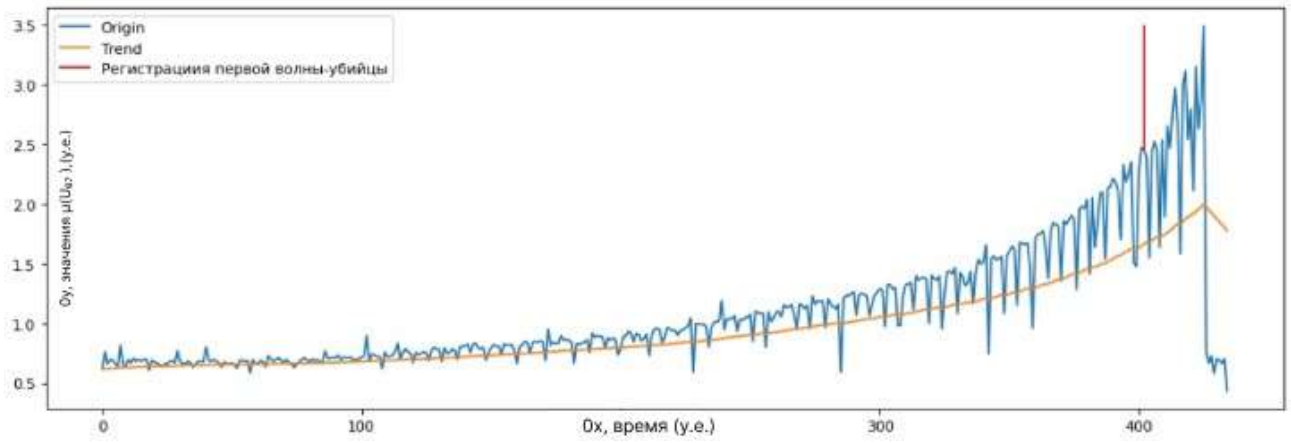


Рисунок 2.3 — Изменение $\mu(U_n)$ с течением времени при $n = 67$

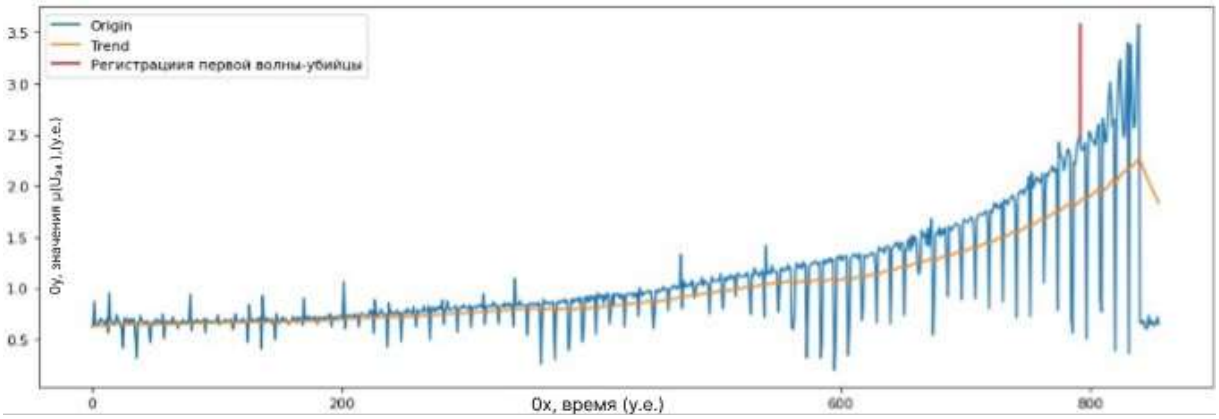


Рисунок 2.4 — Изменение $\mu(U_n)$ с течением времени при $n = 34$

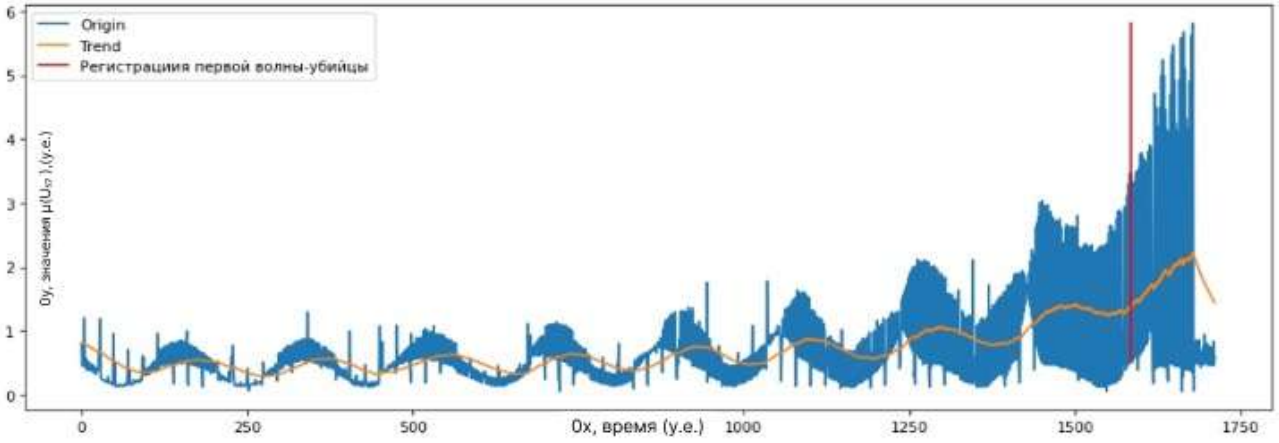


Рисунок 2.5 — Изменение $\mu(U_n)$ с течением времени при $n = 17$

На рисунке (2.5) представлен профиль, позволяющий выдвинуть гипотезу о существовании некоторой периодики в нелинейном динамическом процессе.

2.1.2 Минимизация целевого функционала

Согласно гипотезе, возникновение волны-убийцы должно быть систематическим явлением. А если это так, то можно подобрать n такое, при котором значение $\mu(U_n)$ будет минимальным на всех моментах времени возникновения волны-убийцы. Решение этой задачи сводится к построению целевой функции $\rho(n)$ и ее минимизации. Пусть целевая функция имеет вид

$$\rho(n) = \frac{1}{25} \sum_{t \in T} (\mu_t(U_n))^2 \to \min .$$

Перед началом оптимизации необходимо определить область допустимых значений. Пусть $n \in [3{,}500]$. Под частицей будем понимать реализацию метода имитации отжига для целевой функции $\rho(n)$. Наименьшее значение целевой функции $\rho(n)$ достигается при $n = 17$. Это значение встречалось чаще всего и имело наименьшее значение из всех полученных в результате запуска роя из 60 частиц. На (2.6) изображена функция $\mu_t(U_n)$ при $n = 17$.

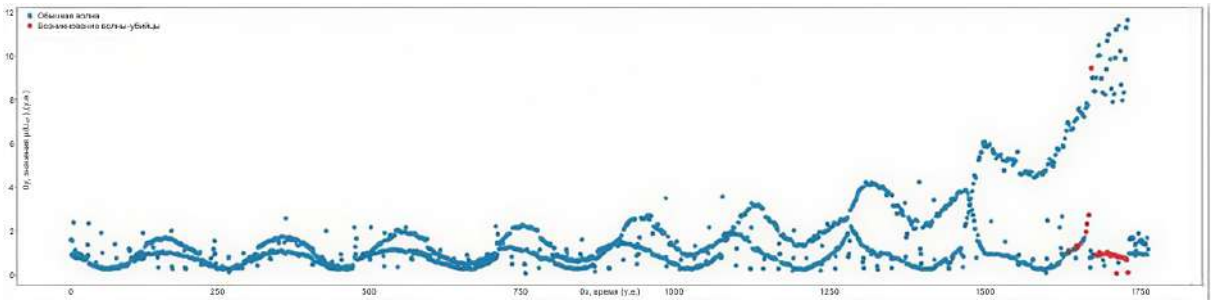


Рисунок 2.6 — Поточечный график $\mu(U_n)$

Применение функции локальной равномерности $\rho(n)$ позволяет отобразить изначальный временной ряд в другой, имеющий более выраженную периодическую динамику. В работе [53] проведено исследование эффекта Портевена-Ле Шателье. Во время проведения исследования эффекта выработана методология для обработки временных рядов с использованием гипотезы о периодичности возникновения волн-убийц.

Проведенный анализ представленного вычислительного эксперимента позволяет сделать вывод о справедливости сформулированной выше гипотезы, при этом разные методы поиска значения числа n приводят к одинаковым результатам.

На рисунке (2.7) представлены распределения амплитуды волн, полученные из временного ряда Y_t. По горизонтальной полуоси отображена амплитуда волн

в метрах, а по вертикальной частота возникновения. Из рисунка видно, что распределение амплитуд волн напоминает суперпозицию нормального закона с несколькими распределениями Рэлея. Благодаря использованию центральной предельной теоремы для данной системы, можно сделать вывод: в данной динамической системе существует выраженная динамика, которая описывается законами распределения Рэлея. При этом именно закон распределения Рэлея используют для описания распределения амплитуд волн в линейной волновой теории.

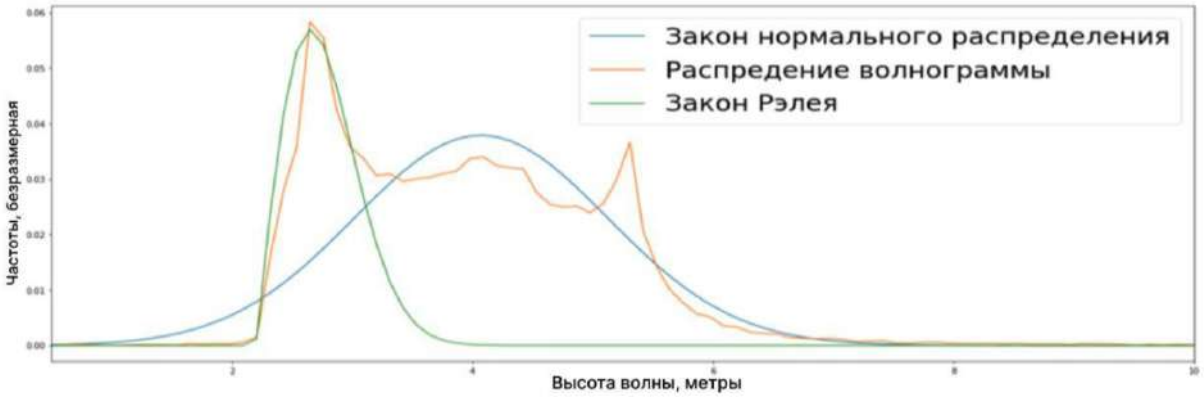


Рисунок 2.7 — Распределения амплитуд волн во временном ряду Y_t

Также следует отметить, что на рисунке (2.8) изображен график распределений значений функции $\mu(U_{17})$, где на вертикальной оси отмечена частота значения, а на горизонтальной − относительное значение функции $\mu(U_{17})$. Профиль распределения очень напоминает закон распределения Рэлея, из чего можно сделать вывод о том, что использование функции $\mu(U_n)$ для преобразования временного ряда Y_t позволяет перейти из описания нелинейной динамики системы к ее некоторому представлению, согласующемуся с линейной теорией волн.

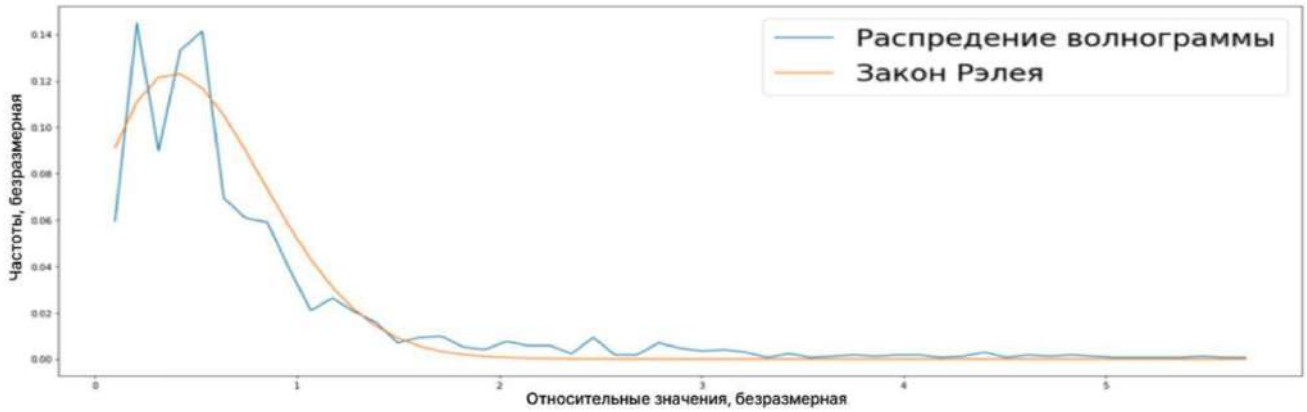


Рисунок 2.8 — Распределение функции $\mu_t(U_{17})$

2.2 Аномалии в динамике мнений

Динамика мнений — это не только формальная закономерность, но и сложный, многогранный процесс, являющийся основной характеристикой любого социального сообщества. Коллективное формирование мнений представляет собой сложный социально-психологический процесс, имеющий фундаментальное значение для функционирования современных обществ. Изучение динамики мнений сосредоточено на исследовании механизмов, посредством которых индивиды в группе или социальной сети корректируют свои взгляды под влиянием взаимодействий с другими агентами, внешней информации и внутренних когнитивных процессов. В условиях цифровой эпохи, характеризующейся взрывным ростом объемов информации и плотности коммуникационных сетей, прогнозирование и анализ динамики мнений становятся одной из ключевых задач для обеспечения социальной стабильности с последующим устойчивым развитием общества.

Традиционно в исследовательском ландшафте в области моделирования динамики мнений можно выделить два основных класса моделей:

основанный на агентном подходе и использующий формализм обыкновенных дифференциальных уравнений, и описывающий эволюцию распределения мнений в популяции, часто с использованием аппарата уравнений Фоккера-Планка или систем связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных. Общим для этих подходов является представление социальной системы в виде сети, узлы которой соответствуют индивидам, а связи — каналам социального влияния. Несмотря на значительные успехи, достигнутые в рамках классических подходов, они обладают рядом существенных методологических ограничений. Прежде всего, большинство моделей опирается на предположение о статической природе социальных сетей, в то время как в реальности топология межличностных взаимодействий подвержена непрерывным изменениям. Другим существенным недостатком классических подходов является линейность или слабая нелинейность процессов социального влияния, что не позволяет адекватно описать такие феномены, как когнитивный диссонанс, упрямство агентов или эффект группового давления. Кроме того, традиционные модели часто игнорируют многомерность и когнитивную сложность мнений, сводя их к единственной скалярной величине или бинарной переменной, что представляет собой грубое упрощение реальных психологических факторов. Важным упущением является также недостаточный учет влияния гетерогенности агентов, в частности, различий в их когнитивных способностях, степени восприимчивости к убеждению и уровне социального авторитета.

С точки зрения формального устройства модели динамики мнений модель можно интерпретировать как процесс формирования группового мнения посредством слияния индивидуальных мнений, при котором взаимодействующие агенты внутри группы постоянно обновляют и объединяют свои мнения по одному и тому же вопросу на основе установленных правил. Результатом слияния могут быть такие состояния, как: консенсус, поляризация или фрагментация на финальной стадии [30; 122]. На данном этапе развития моделирования существует достаточно большое количество закономерностей формирования мнений, а также модификации к ним [1].

Финальным состоянием динамики, как было сказано выше, является либо консенсус, либо разделение участников на партии, внутри которой они придерживаются одного мнения, или расхождение мнений (полное отсутствие консенсуса) [20; 76; 100]. В действительности общественное мнение в социальных группах не достигает идеальных состояний полного консенсуса, так как всегда находятся участники, думающие иначе, чем большинство [74; 92]. Одним из способов, «приближающих» к действительности формирование мнений, дальнейшее их распределение, является подключение шума. Исследователи по-разному оценивают это явление. Так авторы [85; 91] рассматривают шум как «свободное волеизъявление», благодаря которому каждый участник может случайным образом менять свое мнение. А в исследовании [93] шум интерпретируется как замена участников коллектива новыми в группах переменного размера. Также данное явление можно понимать как частичную потерю или изменение информации по различным причинам. Исследование моделей динамики мнений с шумом — это анализ причин «искривления» мнений, отклонение от общественного мнения и выявление новых, ранее не исследованных, сложных причин в социальных системах, порождаемых различными вмешательствами или внутренними процессами. Это особенно важно при изучении социальных процессов, сопровождаемых множеством факторов, прямо или косвенно влияющих на процесс принятия решений отдельными лицами или группами, а также достижения консенсуса или фрагментации мнений всех участников коллектива.

Таким образом, существует настоятельная необходимость в разработке более совершенных математических аппаратов, способных преодолеть хотя-бы некоторые из выше перечисленных ограничений. При анализе существующих работ было выявлено, что большинство исследований носят характер не аналитический, а шумы исследуются с помощью численных экспериментов [36; 60]. Далее представлен подход с использованием дифференциальных уравнений для моделирования процесса искажения мнений.

2.2.1 Моделирование динамики мнений с помехами

Пусть $M = 1,...,n-$ количество участников, тогда $T \subset \mathbb{R}^+-$ множество всех моментов времени. В описываемом сценарии существует мнение каждого отдельно взятого участника, оно зависит только от времени и событий, в соответствии с которыми формируется.

Поставим в соответствие $\forall m_i \in M$ линейный функционал $g_i(t) : T \to O$, где $O \subset \mathbb{R}-$ множество оценок, при $t \in T$. В дальнейшем будем считать, что функционал $g_i(t)-$ мнение участника m_i на определенную тему.

Вектор мнений имеет следующий вид: $v(t) := (g_1(t), \ldots, g_n(t))^T$.

Задано вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$, тогда случайный процесс $X(\omega,t)$ задает мнение о событии, где $\omega \in \Omega$, при $t \in T$. Групповая динамика вектора мнений $v(t)$ описывается уравнением:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \mathrm{D}\,(X, v) + \mathrm{J}\,(v)\,, \tag{2.1}$$

где $\mathrm{D}\,(X, v) -$ оператор формирующий искажения объективного мнения для каждого участника, а $\mathrm{J}\,(v) -$ оператор, учитывающий влияние участников друг на друга.

В начальный момент времени $v(0) = v_0$, тогда система стохастических дифференциальных уравнений с начальными условиями принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = \mathrm{D}\,(X, v) + \mathrm{J}\,(v)\,, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Зафиксируем $\omega_0 \in \Omega$ в случайном процессе $X(\omega,t)$, тогда оператор $\mathrm{D}\,(X(\omega, t), v(t))$ из системы уравнений (2.2) можно представить:

$$\mathrm{D}\,(X, v) = AX(\omega_0,t) - v(t) = AX(t) - v(t),$$

где вектор $A \in \mathbb{R}^n$ состоит из коэффициентов, описывающих искажение восприятия объективного мнения $X(t)$ каждого участника. При этом стоит заметить, что в рамках модельного приближения в дальнейшем будет предполагаться, что функция $X(t) \in \mathfrak{K}_1$.

Пусть оператор влияния $\mathrm{J}(v)$ из системы уравнения (2.2) имеет вид:

$$\mathrm{J}(v) = Bv - diag(BF(v)),$$

где $F : O^n \to O_n^n$, то есть $F(v) = (\underbrace{v \dots v \dots v}_{n})$, а матрица $B \in \mathbb{R}_n^n$ состоит из чисел, характеризующих влияние участников друг на друга.

Рассмотрим двух произвольных участников $m_1, m_2 \in M$. Возможны следующие исходы:

— m_1 может иметь положительное влияние на участника m_2 (мнение участника m_2 стремится к m_1);

— m_1 может иметь негативное влияние на m_2 (мнение участника m_2 отдаляется от m_1);

— участники не имеют никакого влияния друг на друга (изменение значения оценки участника m_1 не связанно с m_2).

Для рассмотрения всех трех случаев влияния нужно, чтобы для матрицы B выполнялось условие: $B \odot B = \mathcal{B}-$ стохастическая матрица, где $\odot-$ покомпонентное произведения элементов матриц.

С учетом всех определенных компонентов оператора искажения $\mathrm{D}(X, v)$ и оператора влияния $\mathrm{J}(v)$ уравнение динамики мнений из системы (2.2) для m_i участника можно представить в координатном виде для функции $g_i(t)$:

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = a_i X(t) - g_i(t) + \sum_i^n \sum_j^n b_{ij}(g_j(t) - g_i(t)), \tag{2.3}$$

или в виде задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dg_1(t)}{dt} = a_1X(t) - g_1(t) + b_{12}(g_2(t) - g_1(t)) + b_{13}(g_3(t) - g_1(t)) + \dots \\ +b_{1n}(g_n(t) - g_1(t)), \\ \dfrac{dg_2(t)}{dt} = a_2X(t) - g_2(t) + b_{21}(g_1(t) - g_2(t)) + b_{23}(g_3(t) - g_2(t)) + \dots \\ +b_{2n}(g_n(t) - g_2(t)), \\ \dots \\ \dfrac{dg_n(t)}{dt} = a_nX(t) - g_n(t) + b_{n1}(g_1(t) - g_n(t)) + b_{n2}(g_2(t) - g_n(t)) + \dots \\ +b_{nn-1}(g_{n-1}(t) - g_n(t)), \\ g_1(0) = \tilde{g_1}, \\ g_2(0) = \tilde{g_2}, \\ \dots \\ g_n(0) = \tilde{g_n}. \end{cases} \tag{2.4}$$

2.2.2 Доказательство существования решения

Обозначим через $L_2^n(T), n-$ мерное пространство квадратично-интегрируемых функций на интервале T. Рассмотрим подробнее пространство $L_2^n(T)$ при $n = 1$, получим $L_2^1(T) = L_2(T)$, тогда $\forall f(t) \in L_2^1(T)$ верна оценка

$$||f||_{L_2} = \left(\int\limits_T |f(t)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Определим норму произвольной функции $f(t) \in L_2^n(T)$ по следующей формуле:

$$||f||_{L_2^n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_T |f_i(t)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Тогда норму оператора $B \in End(L_2^n)$ в пространстве L_2^n определим согласно формуле

$$||B||_{L_2^n} = \max_j \sum_i^m |b_{ij}|.$$

Решением системы уравнений (2.1) при фиксированном $\omega = \omega_0$ будем называть функцию $v(t)$ такую, что $v(t) \in L_2^n(T) \wedge v'(t) \in L_2^n(T)$, если существует $\tau \in T$ такое, что $\forall \tau', \tau'' \in [\tau, \sup(T)]$ верна оценка

$$|v(\tau') - v(\tau'')| < |min(v_0) - max(v_0)|.$$

Также пусть траектория случайного процесса $X(t) \in L_2^n(T)$.

Лемма. Пусть $v(t) \in L_2^n(T) \wedge v'(t) \in L_2^n(T)$ и при фиксированном $\omega = \omega_0$ траектория случайного процесса $X(t) \in L_2^n(T)$. Тогда функция $v(t)$ является решением дифференциального уравнения из системы (2.2).

Доказательство. Введем обозначения $Q = ||v(t)||_{L_2^n}, S = ||v'(t)||_{L_2^n}$ и $K = ||X(t)||_{L_2^n}$.

Найдем значение нормы операторов D(X,v) и J(v) в пространстве L_2^n.

$$||\mathrm{D}(X,v)||_{L_2^n} = ||AX(t) - v(t)||_{L_2^n} \leqslant \max_i |a_i| \cdot ||X(t)||_{L_2^n} + ||v(t)||_{L_2^n} = c \cdot K + Q,$$

где $c = \max_i |a_i|$, а

$$||\mathrm{J}(v)||_{L_2^n} = ||Bv - diag(BF(v))||_{L_2^n} \leqslant ||Bv||_{L_2^n} + ||diag(BF(v))||_{L_2^n} \leqslant$$

$$\leqslant 2Q + ||B||_{L_2^n} \cdot ||F(v)||_{L_2^n} = 2Q + 2Q = 4Q.$$

Тогда справедлива оценка

$$0 < ||\mathrm{D}\,(X, v) + \mathrm{J}\,(v)\,||_{L_2^n} \leqslant c \cdot K + Q + 4Q = c \cdot K + 5Q.$$

2.2.3 Численное моделирование

Ряд численных экспериментов был проведен с помощью программы, реализованной на языке Python. Цель их проведения − определение влияния

изменений параметров моделирования на исход процесса, также анализ основных сценариев поведения динамики, а именно формирование консенсуса; отсутствие единой точки зрения в коллективе; появление агентов − изгоев.

Рассмотрим коллектив, состоящий из трех агентов n_1,n_2,n_3. В начальный момент времени $t = 0$ мнения агентов соответственно будут:
$g_1(0) = 0, g_2(0) = 0.9, g_3(0) = 0.25$.

Используя разностную схему Эйлера, будет получено численное решение системы (2.2).

Матрица влияния участников друг на друга:

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{0.2} & \sqrt{1.8} & 0 \end{pmatrix}.$$

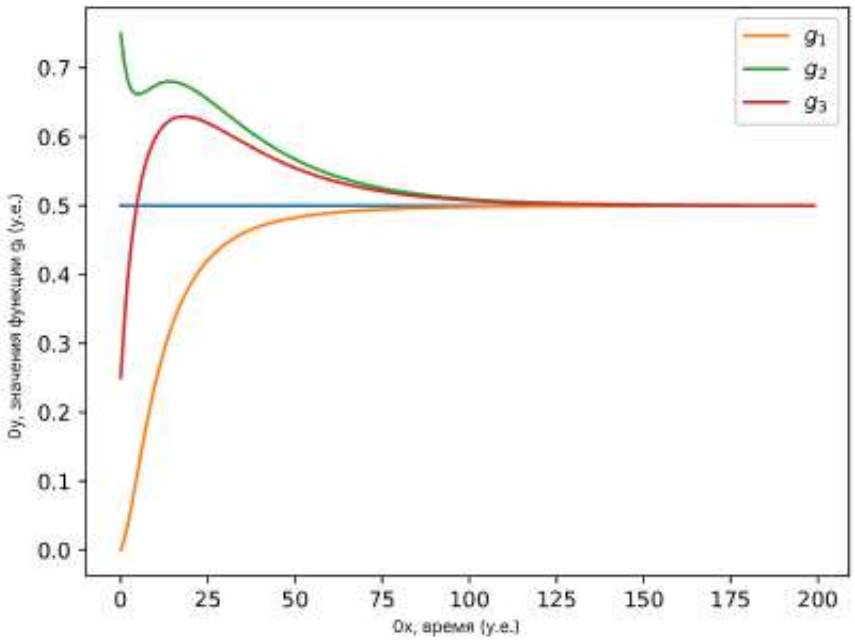


Рисунок 2.9 — Достижение консенсуса

На рисунке 2.9 представлен график наступления консенсуса. Синяя линия – постоянное значение объективного мнения, на основе которого агенты g_i

принимают собственные мнения. Можно заметить, что с течением времени значения функций g_i все меньше отличаются друг от друга.

Также возможны сценарии, при которых будет отсутствовать асимптотическая сходимость, такой сценарий можно наблюдать на рисунке (2.10). Можно заметить, что каждый агент g_i с течением времени отклоняется от синий линии, описывающей объективное мнение, при этом каждый агент g_i следует собственной траекторией.

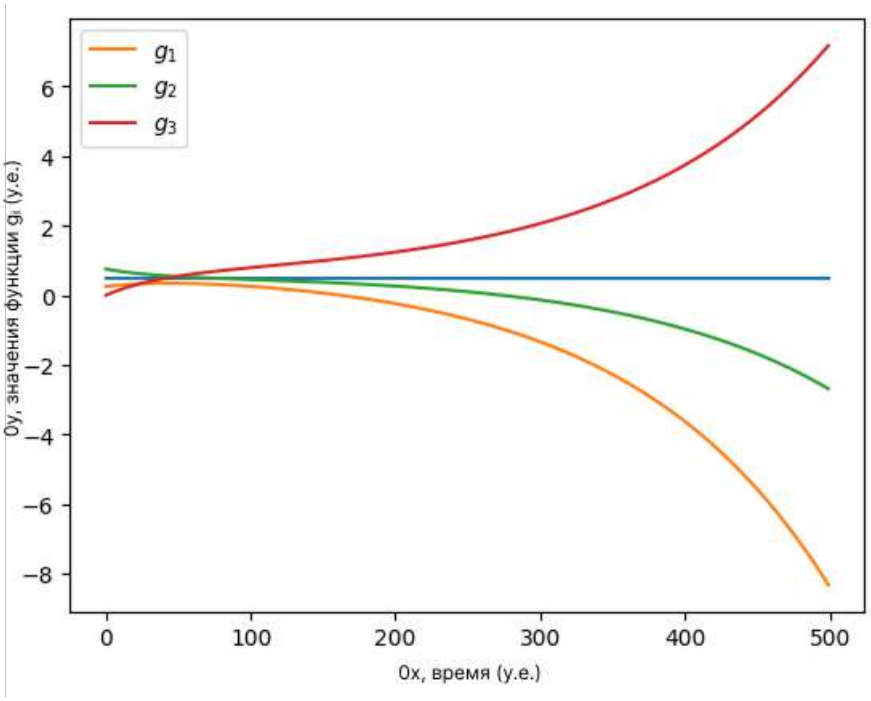


Рисунок 2.10 — Отсутствие коллективного решения

Для каждого агента g_i из системы дифференциальных уравнений (2.3) можно описать соответствующий динамический оператор D_t, принадлежавший классу $\mathfrak{K}_2$. А именно рассмотрим уравнение

$$a_i X(t) - \frac{dg_i(t)}{dt} = g_i(t) - \sum_i^n \sum_j^n b_{ij}(g_j(t) - g_i(t)),$$

правая часть которого соответствует абстрактному динамическому оператору D_t. Следовательно $D_t = a_i X(t) - g_i'(t)$, так как функция $X(t) \in \mathfrak{K}_1$, а $g_i'(t) \in \mathfrak{K}_2$, то и $D_t \in \mathfrak{K}_2$, при этом справедливы следующие оценки:

$$0 \leqslant ||D_t|| \leqslant ||a_i X(t)|| + ||g_i'(t)|| < \infty.$$

2.3 Динамика пластических деформаций

Пластическая деформация интерпретируется как необратимое изменение формы твердого тела под действием приложенных напряжений. Данное явление является фундаментальным физическим процессом, лежащим в основе множества технологических операций, определяющим эксплуатационную надежность конструкционных материалов. В отличие от упругой деформации, которая носит обратимый характер и описывается законом Гука, пластическое течение связано с нелинейными и диссипативными механизмами перестройки внутренней структуры материала. Феномен пластичности повсеместно встречается в промышленных процессах: штамповка, прокатка, волочение и ковка металлов; в которых пластическая деформация является целевым и управляемым процессом, позволяющим придать заготовке требуемую форму. Однако те же самые физические механизмы могут проявляться и в негативном ключе, приводя к нежелательным последствиям: остаточные деформации в несущих элементах конструкций, возникающие под действием экстремальных нагрузок, усталостное разрушение деталей машин и механизмов. Задачи прогнозирования, контроля и управления пластическим деформированием находятся в фокусе внимания таких критически важных отраслей, как аэрокосмическая, автомобильная, энергетическая и оборонная промышленность, в которых недопустимы преждевременные отказы и требуется гарантированный ресурс работы материалов в широком диапазоне температур, напряжений и скоростей нагружения.

Исторически и методологически основные подходы к описанию пластичности можно разделить на несколько крупных направлений. Феноменологические модели, опирающиеся на концепцию механизма текучести и условия пластичности, а также на правила течения и упрочнения, получили наибольшее распространение в инженерной практике. Эти модели, будучи реализованными в методах конечных элементов, позволяют эффективно рассчитывать напряженно-деформированное состояние изделий в процессе изготовления и эксплуатации. К их достоинствам относятся относительная простота и возможность идентификации параметров на основе стандартных механических испытаний. Однако они зачастую не учитывают физическую природу пластичности, связанную с движением и взаимодействием дискретных дефектов кристаллической решетки – дислокаций, что ограничивает их предсказательную способность за пределами диапазона условий, в котором были получены экспериментальные данные. В противоположность этому, физически основанные модели непосредственно рассматривают дислокационные механизмы как доминирующий носитель пластического течения в кристаллических материалах. Представленные модели требуют определения значительного количества физических параметров, что сопряжено с трудоемким экспериментом, а их вычислительная реализация является более затратной по сравнению с феноменологическими аналогами.

Современным трендом является развитие многомасштабных моделей, которые пытаются преодолеть ограничения предыдущих подходов путем прямого численного моделирования дислокационной структуры методами молекулярной динамики или дискретного дислокационного анализа, с последующим усреднением результатов для параметризации континуальных моделей на макроуровне. Несмотря на значительный прогресс, эти методы сталкиваются с проблемой "провала в масштабах"– гигантским разрывом между пространственно-временными масштабами, доступными для прямого моделирования, и масштабами реальных деталей и технологических процессов. Ключевыми проблемами, общими для большинства подходов, остаются адекватное описание перехода от равномерной деформации к локализованной,

учет эффектов пространственной и временной неоднородности пластического течения, а также корректное моделирование поведения материала на стадии развития макроскопической неустойчивости. Особую сложность представляет описание динамики пластических деформаций в условиях, когда релаксационные процессы не успевают за скоростью нагружения, что приводит к потере устойчивости пластического течения и является предметом интенсивных исследований. Именно к этому классу явлений относится эффект Портевена-Ле Шателье, четко наблюдаемый в ряде сплавов алюминия и магния.

В промышленности широкое применение находят сплавы алюминия из-за его легкости, коррозийной устойчивости и податливости штамповке. Однако, данные сплавы подвержены эффекту Портевена-Ле Шателье, то есть, проявляют неустойчивость пластического течения. На практике это приводит к локализации дислокаций и возникновению деформационных промежутков (полос) Чернова-Людерса [9; 127], которые в свою очередь приводят к неконтроллируемому нарушению структуры материала и возникновению трещин, разрывов, неровностей на поверхности. Данные эффекты недопустимы для автомобильной, авиастроительной, пищевой и фармацевтической промышленности, а потому требуется точно определять границы, разделяющие области устойчивого и неустойчивого пластического течения.

Эффект Портевена-Ле Шателье оказывает влияние на множество свойств материалов: увеличивает напряжение текучести, меняет предел прочности при растяжении и меняет скорость упрочнения материала. Это влияние приводит к тому, что пластичность сплава снижается с соответствующим уменьшением относительно удлинения и эффективной площади поперечного сечения. Сплавы под деформацией становятся более восприимчивыми к возникновению повреждений из-за уменьшения вязкости из-за эффекта Портевена-Ле Шателье [26; 101; 119]. Все это в совокупности приводит к износу сплава. Дальнейшее разрушение материала может быть вызвано окислением в газо-водных средах, что приводит к коррозии. Таким образом,

для конструкционных материалов обнаружение восприимчивости к эффекту Портевена-Ле Шателье является одной из ключевых задач.

Таким образом, перед промышленностью стоит задача оперативного мониторинга материалов и их состояния во время эксплуатации на предмет последствий эффекта Портевена-Ле Шателье.

2.3.1 Эффект Портевена-Ле Шателье

Наиболее значимой задачей, возникающей при исследовании эффекта Портевена-Ле Шателье, как при экспериментальном изучении, так и при теоретическом анализе, является нахождения как критерия неустойчивости пластической деформации, так и установления областей неустойчивости [68; 69]. Однако, несмотря на широкое применение сплавов в промышленности и широкую теоретическую базу, эффект Портевена-Ле Шателье мало исследован в рамках экспериментов. В данной главе будет уделено внимание особенностям пластических деформаций в сплавах металлов, посредством проведения исследования результатов данных, полученных путем экспериментального разрыва деталей. Обработка полученных данных будет производиться на основе разработанного математчиеского аппарата, в контексте примерения аппарата к исследованию временных рядов. Также уделено внимание поиску взаимосвязей между возникновением аномальных явлений в данных, в частности, напоминающих экстремальное явление из гидродинамики, известное как волны-убийцы.

Для исследования эффекта Портевена-Ле Шателье был проведен эксперимент, в ходе которого детали подвергались разрыву на установке. Всего в эксперименте было использовано 4 плоских образцов из нагартованного сплава А5Н с содержанием примесей не более 0.5[53].

Каждая из деталей А5Н подвергалась разрыву на установке с наибольшей предельной нагрузкой 5 кН и диапазоном измерений 0,3–5 кН. В ходе эксперимента регистрировалось внутреннее напряжение образца и его растяжение. Растяжение проводилось с постоянной скоростью, поэтому время

проведения эксперимента оказалось линейно зависимым от растяжения. Такой подход позволяет рассматривать зависимость между растяжением образца и внутренним напряжением через временные ряды. Визуализация результатов эксперимента для одного из образцов сплава A5H представлена на рисунке (2.11).

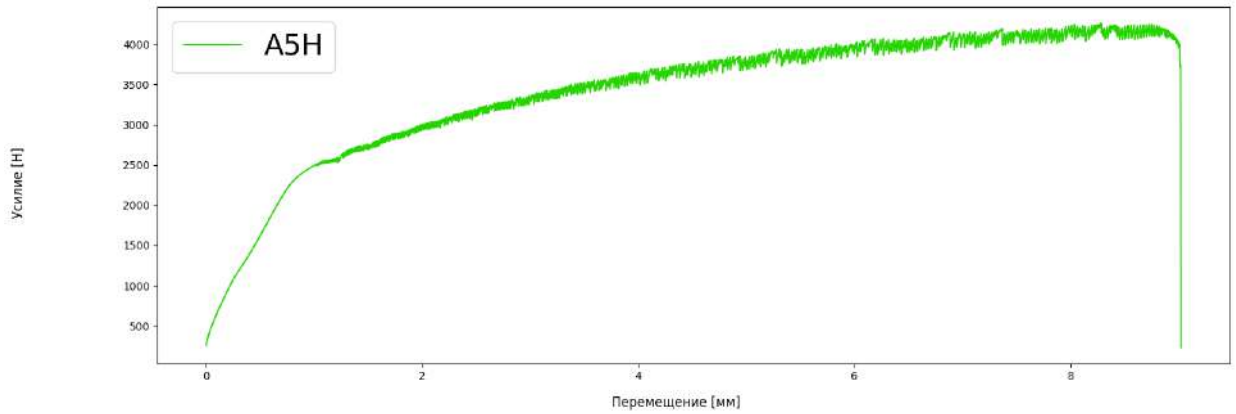


Рисунок 2.11 — Зависимость напряжения от растяжения алюминия A5H

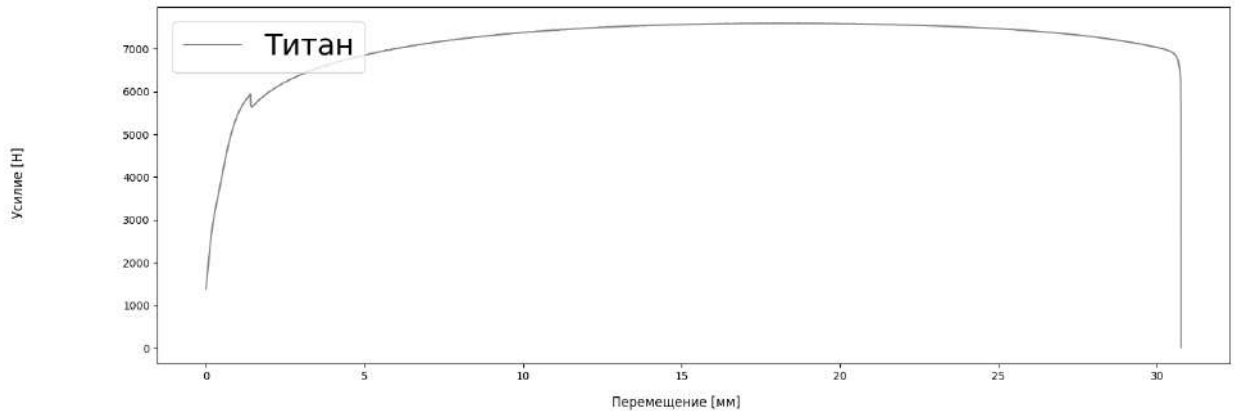


Рисунок 2.12 — Зависимость напряжения от растяжения для сплава титана Ti-8Al-1Mo-1V

Из рисунков (2.11) и (2.12) видно, что при идентичных условиях эксперимента (идентичные температурные, пространственные условия, а также использование одной и той же установки для исследования разрывов материалов) сплавы титана и алюминия ведут себя по-разному. Сплавы алюминия имеют более выраженный эффект Портевена-Ле Шателье, в то время как титан в зависимости

от сплава и кристаллической решетки может иметь менее выраженные полосы Чернова-Людерса [4].

После изучения результатов эксперимента была произведена обработка экспериментальных данных для всех образцов. В дальнейшем предполагается, что обработка сплавов алюминия и титана происходят не зависимо друг от друга.

2.3.2 Анализ результатов натурного эксперимента

Обработка экспериментальных данных включает в себя следующие этапы: интерполяцию, линейную нормировку данных, вычленение интервалов возникновения эффекта Портевена-Ле Шателье.

На первом этапе выбирается значение параметра $k-$ минимальное количество строк, зарегистрированных в одной серии эксперимента. В дальнейшем параметр k используется для интерполяции других результатов.

Затем экспериментальные данные линейно нормируются, и для них вычисляется матрица корреляции, которая позволяет подтвердить то, что все образцы сплава алюминия А5Н ведут себя одинаково. Матрица корреляции представлена на рисунке (2.13).

На последнем этапе предобработки данных по каждому образцу алюминия детектируется момент появления эффекта Портевена-Ле Шателье. Все дальнейшие исследования сплавов в данной работе будут проводиться исключительно в интервале со старта появления эффекта Портевена-Ле Шателье и до окончательного разрыва образца. Также вводится понятие момента возникновения флуктуаций, под которым подразумевается первый момент достижения первого локального максимума с момента начала проведения эксперимента.

Полученные и предобработанные наборы данных подвергаются интерпретации с точки зрения временных рядов. Высота волны h_i временного ряда X_t

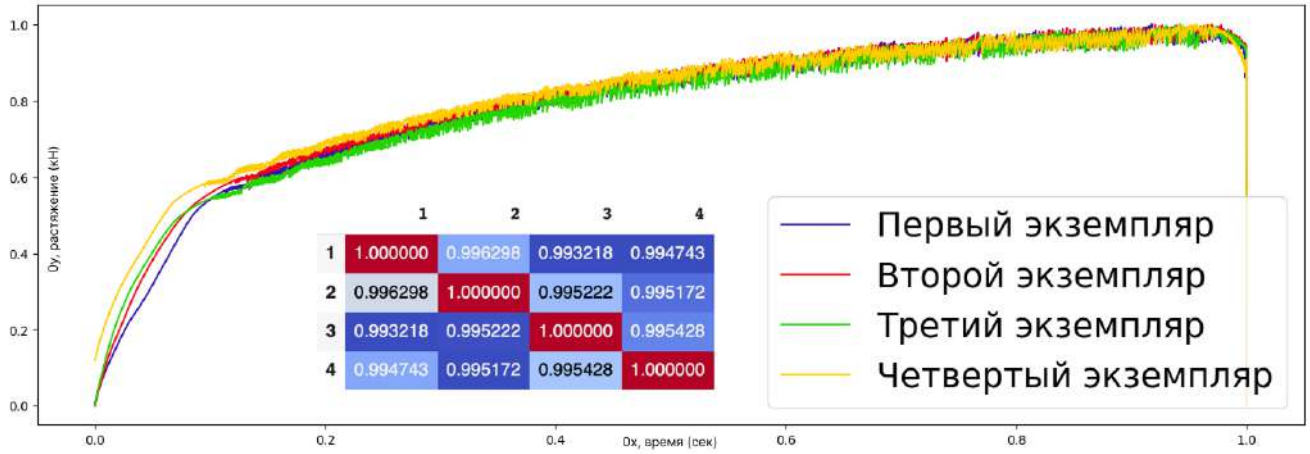


Рисунок 2.13 — Экспериментальные данные образцов алюминия А5Н

вычисляется по следующей формуле:

$$h_i = x_{max} - (x_{minL} + x_{minR})/2,$$

где x_{max}— локальный максимум, а x_{minL}, x_{minR}— ближайшие локальные минимумы, окружающие x_{max}.

Рассматривается понятие класса эквивалентности волн $[h]$ для построения распределения высоты волн. Для этого достаточно полагать, что h_i эквивалентен h_j, если выполняется следующее соотношение:

$$round\left(\frac{h_i}{\delta}\right) = round\left(\frac{h_j}{\delta}\right),$$

где δ— параметр ширины класса эквивалентности. На рисунке (2.14– **??**) представлены распределения высоты волн для одного из образцов сплава А5Н при различных δ.

Распределения высот для волн находится с помощью числа уникальных классов эквивалентности высоты волн, далее вычислялось количество представителей класса. На графике на горизонтальной оси находятся классы эквивалентности, линейно нормированные от 0 до 1. По вертикальной

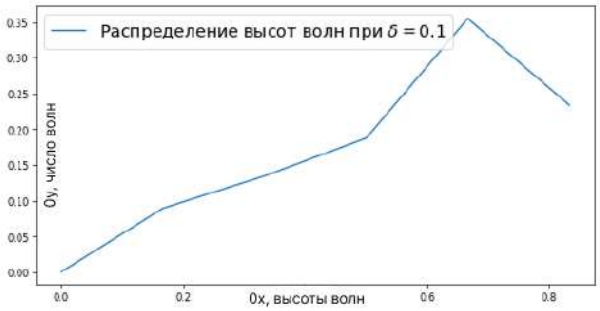


Рисунок 2.14 — Распределения высот волн для одного из образцов сплавов алюминия А5Н. График зависимости распределения высоты волн от растяжения для образца при $\delta = 0{,}1$ (по оси $y-$ нормированное число волн в эквивалентном классе, по оси $x-$ нормированные высоты волн)



Рисунок 2.15 — Распределения высот волн для одного из образцов сплавов алюминия А5Н. График зависимости распределения высоты волн от растяжения для образца при $\delta = 0{,}01$ (по оси $y-$ нормированное число волн в эквивалентном классе, по оси $x-$ нормированные высоты волн)

оси производилась нормировка количества встречаемых классов таким образом, чтобы количество всех встречаемых значений каждого класса равнялось единице. Если интерпретировать результаты эксперимента в качестве случайного процесса, то полученные графики соответствуют функции плотности распределения высот волн. График распределения напоминает $\beta-$распределение

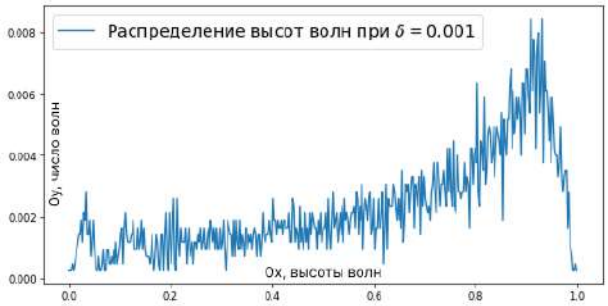


Рисунок 2.16 — Распределения высот волн для одного из образцов сплавов алюминия А5Н. График зависимости распределения высоты волн от растяжения для образца при $\delta = 0{,}001$ (по оси $y-$ нормированное число волн в эквивалентном классе, по оси $x-$ нормированные высоты волн)

с параметрами $a = 18, b = 4$ или сумму экспоненты с затухающей гармоникой ближе к максимальному значению распределения.

При исследовании параметра δ можно сделать вывод, что δ обратно пропорционально числу классов эквивалентности $[h]$, при $\delta << 1e - 6$ распределение практически равномерно распределяется на отрезке [0,1]. Наиболее информативная картина получается при $\delta = 0{,}01$. Это значение используется в дальнейшем.

В исследованиях [79; 116] анализировались динамические системы на примере гидродинамического процесса, моделирование которого осуществлялось с использованием случайных величин, сгенерированных на основе функций с экспоненциальным профилем. Установлено, что результаты моделирования сходятся с данными вычислительных экспериментов [16; 70]. На основании полученных данных выдвинута гипотеза о том, что эффект Портевена-Ле Шателье представляет собой динамическую систему, содержащую анолмальные явления, которые по своей структуре, напоминают другое аномальное явление из гидродинамики, известное как волны-убийцы [72; 82]. Под волнами-убийцами понимаются волны, удовлетворяющие амплитудному критерию, при достаточно высоком волновом фоне, $H \geqslant 2.1$, который вычисляется по следующей формуле:

$$H = \frac{h_i}{h_{sm}},$$

где h_i– высота i–ой волны, а h_{sm}– среднее значение высоты одной трети самых высоких волн.

Для уменьшения вклада шумов в исследование используется понятие оценки дисперсии высоты волны μ_n для множества $M = h_{in}$ через значение дисперсии высот волн h_i в наборе размера n. Предполагается, что для первых $n-1$ волн $\mu_n = 0$, после чего множество смещается по временной оси на одну условную единицу времени для каждого временного ряда. Таким образом, при $n \in [4, 100]$ формируется множество траекторий $\mu_n(t)$.

Далее проводится отбор траекторий на основании следующих критериев:

– Аномалии должны присутствовать среди оценок $\mu_n(t)$.
– Число аномальных явлений должно составлять не менее двадцати и не превышать ста.
– Аномальные явления должны возникать с максимально равномерными временными промежутками.

Второй критерий согласуется с результатами вычислительных экспериментов [16; 70], где зафиксировано 25 волн-убийц. Третий критерий интерпретируется через оценки $\mu_n(t)$ как минимизация среднего значения $\mu_n(t)$ в каждый момент времени.

На рисунке (2.17) представлена зависимость изменения оценки $\mu_n(t)$ от времени, где выделена самая минимальная траектория в соответствии со вторым критерием. Красными точками обозначены зарегистрированные волны-убийцы. Видно, что после последней зарегистрированной волны-убийцы среднее значение $\mu_n(t)$ начинает убывать вплоть до разрыва исследуемого образца.

Применив аналогичные рассуждения к сплаву титана, получим следующий график на рисунке (2.17).

Из рисунка (2.18) видно, что динамика, родственная волнам убийцам, в данном образце не наблюдается. Это согласуется с физическими трактовками эффекта Портевена-Ле Шателье для поведения сплавов титана.

Итак, разработан метод анализа эффекта Портевена Ле Шателье на основе интерпретации результатов эксперимента в качестве временного ряда. Для каждого материала построены распределения высот волн. Замечено, что при

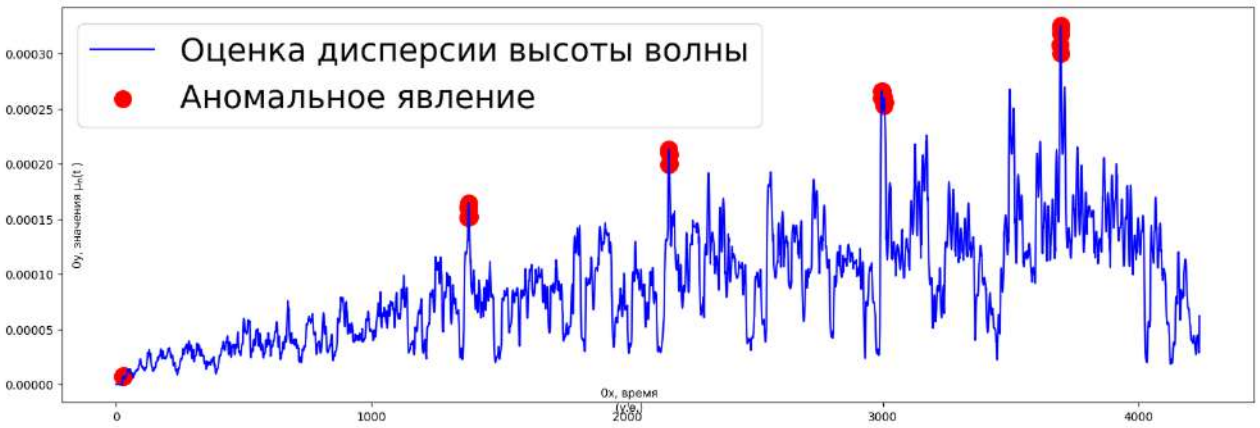


Рисунок 2.17 — Оценка образца A5H при $n = 26$

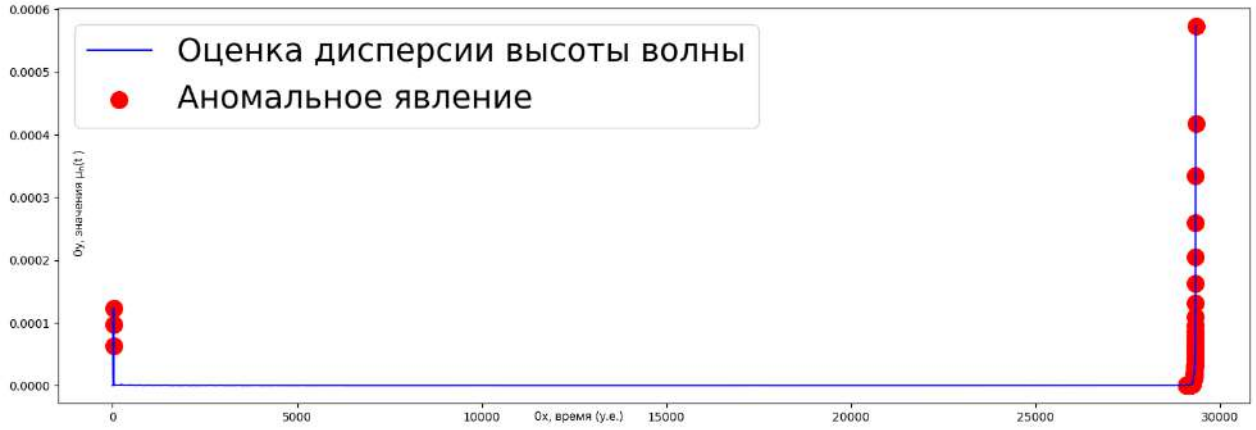


Рисунок 2.18 — Оценка образца Ti-8Al-1Mo-1V при $n = 26$

достижении глобального максимума для μ_n в дальнейшем наблюдается снижение среднего значения оценки дисперсии высот волн. Проведены эксперименты на растяжение для сплава A5H и Ti-8Al-1Mo-1V. На каждом образце алюминия зарегистрирован эффект Портевена-Ле Шателье, который для данных сплавов наиболее ярко выражен. Для образца титанового сплава эффект Портевена-Ле Шателье не характерен, что наглядно отражено на графике зависимости изменения оценки $\mu_n(t)$ от времени t, где не зафиксирована периодичность возникновения аномальных явлений. Сходство графиков распределения для волн-убийц и процессов разрыва металлов можно объяснить с помощью

эффекта локальной концентрации энергии. Если рассмотреть гипотезу о том, что волны-убийцы возникают из-за локальной концентрации энергии, то аналогичным механизмом для сплавов будет являться концентрация дислокаций в материалах.

2.4 Архитектура программного обеспечения

Современное развитие программного обеспечения за последний десяток лет существенно изменило свое направление. Основная причина изменения связанна с реальными вычислительными возможностями процессоров, а именно, с законом Мура. Оказалось, что закон Мура, который предсказывал экспоненциальный рост вычислительной мощности, не обеспечивает больше соответствующего увеличения производительности процессоров. Основной причиной стали физические ограничения реального мира, связанные с уменьшением размеров транзисторов. Постоянное уменьшение размеров затворов подошло к масштабам размеров, на которых начинают проявляться квантовые эффекты просачивания частиц через закрытие затворы. Данный феномен является ключевой проблемой, осложняющей современную разработку микрочипов. Как результат, фактический рост вычислительной мощности процессоров оказался значительно меньше ожидаемого. Для компенсации ожиданий было принято решение не об увеличении тактовой частоты каждого отдельного ядра, а об увеличении количества ядер в процессорах, и как следствие произошло увеличение количества доступных вычислительных потоков для операционной системы.

Большое количество вычислительных потоков повлияло на разработку программного обеспечения формированием определенных паттернов (массового параллелизма, векторных операций или высокоуровневой логики управления) для эффективной обработки больших данных, научных вычислений, в частности разделением одной большой задачи на большое количество разных маленьких

подзадач. Важно отметить, что каждая подзадача может обладать собственной спецификой, которую нужно учитывать при реализации ее решения. Именно в данном контексте возникает идея рассмотрения архитектуры программного обеспечения через набор разных программных компонентов или модулей, каждый из которых наилучшим образом решает свою специализированную задачу наиболее эффективным образом. Такая архитектура программного обеспечения называется неоднородной или негомогенной архитектурой программного обеспечения. Негомогенная архитектура программного обеспечения подразумевает под собой проектирование не одиночного решения, а планирование различных компонентов, которые образуют единую систему. В подобной системе вычислительные задачи исполняются на компонентах, лучше всего соответствующих их специфике. Негомогенная архитектура программного обеспечения как правило использует гетерогенность аппаратной платформы для достижения максимальной производительности или эффективности путем снижения задержек, в отличие от симметричных многопроцессорных систем, где нагрузка распределяется между идентичными ядрами. Еще одним преимуществом негомогенной архитектуры программного обеспечения является поддержка широкого класса специализированных процессоров и ускорителей, таких как графические процессоры, специальные тензорные процессоры, программируемые интегральные схемы и другие.

Негомогенная архитектура программного обеспечения не является универсальным решением, выбор ее в качестве основной модели устройства программного обеспечения формирует новые вызовы: сложность написания программного кода для разных компонентов, — от программиста требуется знание нескольких языков и моделей программирования; проблема эффективной балансировки нагрузки и планирования выполнения подзадач с их последующей синхронизацией; высокая стоимость ошибки, — неправильное решение может приводить к простоям одних компонент системы в то время, как другие будут перегружены; проблема предоставления данных от одного компонента к другому, — пересылка сообщений вызывает накладные расходы; сложность отладки и воспроизведения багов. Но не смотря на выше перечисленные недостатки

негомогенной архитектуры для современного программного обеспечения, одним из ее наиболее важных преимуществ является гибкость. Необходимость в гибкости обусловленна существованием широкого набора инструментов и технологий, позволяющих решать специализированные задачи наилучшим образом, которые крайне быстро обновляются, теряют актуальность или неожиданно появляются. При этом нужно также не только поддерживать состояние продукта, но и развивать его, актуализируя под новые реалии.

Одним из подходов обеспечения гибкости архитектуры программного обеспечения является выбор негомогенной архитектуры программного обеспечения, в частности, переход именно к микросервисной модели архитектуры программного обеспечения [86]. Переход к микросервисной архитектуре представляет собой фундаментальную трансформацию в разработке программного обеспечения. В отличие от монолита, где все функции сосредоточены в единой кодовой базе, микросервисный подход требует декомпозирования приложения на набор независимых сервисов, что обеспечивает максимальную гибкость, возможность реализации каждого сервиса на наиболее эффективном языке программирования, горизонтальное и вертикальное масштабирование [66]. Эта парадигма особенно востребована при построении высоконагруженных и масштабируемых систем, где независимое масштабирование компонентов становится критически важным для эффективного использования ресурсов [63; 113]. Распределенное устройство микросервисной архитектуры формирует набор новых вызовов, а именно, возникает повышенная сложность отладки рабочей версии всего приложения [48], необходимость грамотного управления техническим долгом, рост которого коррелирует с увеличением количества сервисов [81], а также проблема установления доверия между независимыми компонентами системы, особенно при наличии публичного расположения компонентов системы [78]. При этом неудачная процедура выделения отдельных сервисов может приводить к снижению эффективности работы приложения, возникшему из-за траты существенного количества вычислительных ресурсов на пересылку сообщений между микросервисами. При интенсивном сценарии использования приложения

и неудачной нарезки на микросервисы в работе приложения может возникнуть аномальный расход вычислительных ресурсов, выводящий приложение из корректного сценария работы.

Традиционные методы мониторинга, основанные на статических правилах, не справляются с динамичной и сложной природой микросервисов [94; 102; 120]. В связи с этими трудностями в последние годы сформировалось направление, предлагающее внедрять в устройство приложения отдельные сервисы с поддержкой искусственного интеллекта или реализацией некоторых методов машинного обучения для решения задач прогнозирования аномалий, преждевременного выявления сбоев в реальном времени или даже для автоматического устранения кибератак [13; 102]. У этого подхода есть два ключевых недостатка: эффективность интеллектуальных систем напрямую зависит от данных, которые как правило могут быть только ретроспективными; интеграция подобных сервисов усложняет инфраструктуру приложения и требует дополнительного расхода вычислительных ресурсов на постоянной основе, при этом сами по себе интеллектуальные сервисы контроля и мониторинга не дают гарантий отсутствия аномалий в их же собственной работе. В данной работе для прогнозирования существования аномального расхода вычислительных ресурсов предлагается использовать методы формальной верификации и математического моделирования, а именно интерпретировать процесс общения микросервисов в качестве динамической системы. Такой метод позволяет сформировать архитектурные рекомендации для отсутствия возникновения аномального расхода вычислительных ресурсов на этапе планирования микросервисов без дополнительного регулярного расхода вычислительных ресурсов.

2.4.1 Модель архитектуры

На протяжении последних нескольких десятилетий паттерн проектирования Модель-Представление-Контроллер является одним из основных архитектурных шаблонов, обеспечивающих работу приложений на разных платформах и

устройствах. Благодаря четкому разделению задач, шаблон проектирования Модель-Представление-Контроллер привнес структуру и возможность повышения повторного использования кодовой базы в разработку программного обеспечения. Не стоит забывать о том, что технологии развиваются кране быстрым образом, поэтому все чаше возникает вопрос, на сколько актуально доминирование данного шаблона в рамках современного дизайна программного обеспечения.

Современные пользователи программного обеспечения ожидают моментальной реакции от пользовательского интерфейса, что довольно тяжело достигается при строгом следовании идеям шаблона проектирования Модель-Представление-Контроллер. Для преодоления этой проблемы современные фреймворки внедряют новые подходы, лучше поддерживающие параллелизм или конкуретное выполнение задач, в частности, переходят к моделям реактивного программирования.

Шаблон проектирования Модель-Представление-Контроллер — это фундаментальный шаблон проектирования в архитектуре программного обеспечения, предназначенный, в частности, для создания пользовательских интерфейсов в приложениях или веб-разработке. Он разделяет приложение на три отдельные части, каждая из которых несет определенную ответственность: модель, представление и контроллер. Такое разделение предоставляет множество преимуществ и способствует широкому внедрению шаблона проектирования Модель-Представление-Контроллер в различные проекты разработки. Подробнее рассмотрим терминологическое устройство шаблона. Модель в терминалогии паттерна представляет собой модель данных и бизнес-логику приложения. Она определяет структуры данных, управляет сохранением данных, взаимодействием с базами данных или другими механизмами хранения, реализует основные функциональные возможности приложения. По своей сути, модель — это ключевой компонент системы, управляющий логикой приложения и обрабатывающий запросы пользователей. Представление – компонент, отвечающий за форму и вид пользовательского интерфейса. Он состоит из визуального представления данных для конечного пользователя. Представление

получает данные из модели и отображает их в понятном и визуально привлекательном виде. Это может быть графический интерфейс пользователя, веб-страница или любая другая форма отображения. Компонент представления является пассивным и не содержит никакой бизнес-логики. Его единственная задача – представление пользователям данных о модели. Контроллер функционирует как посредник между моделью и представлением. Он обрабатывает взаимодействие пользователя с представлением, интерпретирует его и управляет моделью, поручая ей выполнять необходимые действия на основе входных данных, полученных от пользователя. Затем контроллер извлекает результирующие данные из модели и направляет их в представление, формируя его обновление. Такой подход позволяет создать четкий поток данных между пользователем, представлением, контроллером и моделью.

Шаблон проектирования Модель-Представление-Контроллер обладает рядом преимуществ, которые сделали этот подход популярным выбором среди разработчиков: позволяет разделять данные, представление и элементы управления приложением, обеспечивая более чистый код, что способствует улучшению технической поддержки приложения и упрощает совместную работу в группах разработчиков. Каждый компонент шаблона может быть протестирован независимо от других, что упрощает процедуру выявления ошибок и повышает скорость их устранения. Разделение задач обеспечивает большую гибкость, а именно, разработчики могут изменять представление, не затрагивая логику модели, или изменять функциональность модели, не изменяя представления.

К недостаткам шаблона проектирования Модель-Представление-Контроллер относят: сложность поддержки разделения функциональности на компоненты при увеличении кодовой базы приложения; повышенная загруженность контроллера обязанностями по обработке пользовательского ввода, — манипулирование данными и обновление представления, что может привести к затруднению понимания устройства, тестирования и поддержки компонентов. В некоторых реализациях контроллер может быть тесно связан как с представлением, так и с моделью, из-за чего небольшие изменения в

представлении могут потребовать модификацию контроллера, и наоборот. Аналогичным образом, обновление логики модели может потребовать корректировок в контроллере. Такая тесная взаимосвязь может препятствовать повторному использованию кода и затруднять адаптацию приложения к меняющимся требованиям.

По мере роста масштабов приложения управление сложными потоками данных и взаимодействиями между многочисленными представлениями, контроллерами и моделями может становиться все более затруднительным. Четкое разделение задач может быть затруднено, что приводит к запутанной сети зависимостей, формируя технический долг.

В то время как отдельные компоненты шаблона проектирования Модель-Представление-Контроллер можно тестировать изолированно, тестирование всего процесса работы приложения и взаимодействия с пользователем в крупномасштабных проектах может усложняться. Тесная связь между компонентами может затруднить выделение и тестирование конкретных моделей поведения.

Традиционные реализации шаблона Модель-Представление-Контроллер могут иметь ограниченные встроенные возможности привязки данных. В качестве альтернативы шаблона Модель-Представление-Контроллер рассматривается шаблон Модель-Представление-Намерение, одно из преимуществ которого заключается в обеспечении предсказуемого управления состоянием с помощью однонаправленного потока данных. Данный подход упрощает анализ поведения приложения и облегчает его отладку, сочетая ключевые преимущества своего конкурента ˘ шаблона Модель-Представление-Контроллер. Шаблон Модель-Представление-Намерение особенно хорошо подходит для создания реактивных приложений, в которых важно эффективное управление состоянием с учетом концепции неизменяемости. Однако для его внедрения разработчикам требуются компетенции использования концепций функционального программирования.

Выбор оптимального решения в виде шаблона для создания архитектуры системы зависит от его конкретных требований, поэтому требуется

учитывать такие факторы, как размер проекта, сложность, желаемый уровень разделения задач и опыт команды разработчиков. Например, если целевое приложение основано на данных с частым обновлениям пользовательского интерфейса, двусторонняя привязка данных шаблона проектирования Модель-Представление-Контроллер может оказаться наиболее приоритетной. В другом случае для приложения с высокой степенью реактивности, где управление состоянием имеет решающее значение, шаблон Модель-Представление-Намерение проявит себя наилучшим образом.

В качестве примера негомогенной архитекторы программного обеспечения в работе рассматривается микросервисная архитектура, построенная по шаблону проектирования Модель-Представление-Контроллер. Предложенный паттерн позволяет описать устройство серверной части приложения через набор микросервисов и специального сервиса, согласующего работу микросервисов – контролера. На рисунке 2.19 представлена схема микросервисной архитектуры.

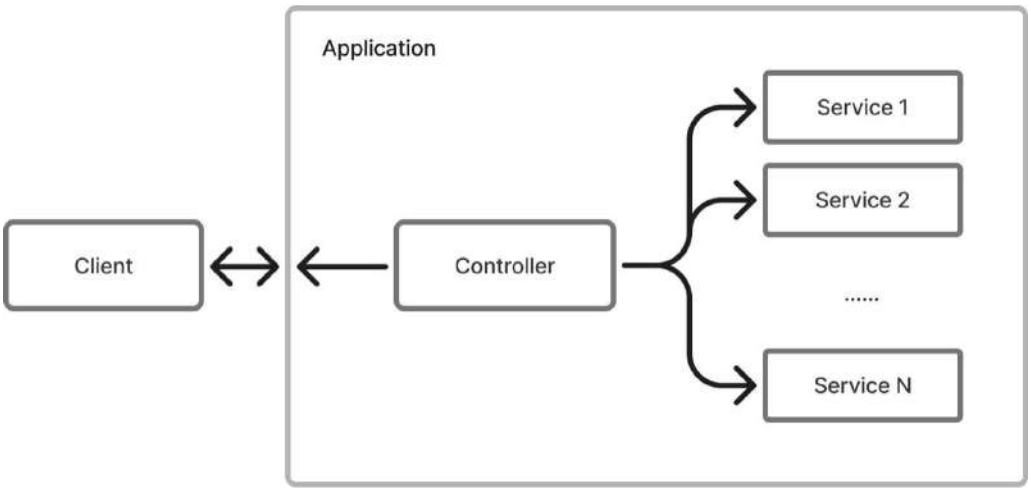


Рисунок 2.19 — Схема микросервисной архитектуры

Множество сервисов приложения обозначим за S, далее без потери общности предполагается, что контроллер является единственным управляющим сервисом.

Для любых S_i,$S_j \in S$ сервисов, при $i \neq j$ можно построить диаграмму взаимодействия на рисунке 2.20.

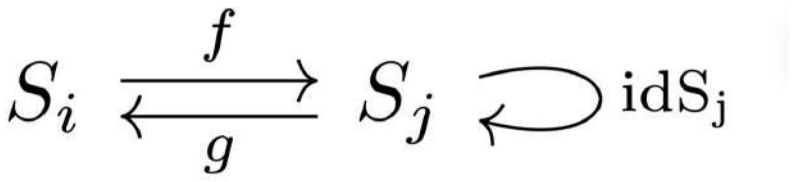


Рисунок 2.20 — Коммутативная диаграмма сервисов

Тогда морфизмы f, g называют «запросом» и «ответом» соответственно, а эндоморфизм idS_j является «выполняющим вычисления», следовательно, существует эндоморфизм idS_i, образуемый композицией морфизмов f, g. Таким образом, рассматриваемая модель микросервисной архитектуры программного обеспечения является категорией [80]. Рассмотрение устройства микросервисной архитектуры программного обеспечения позволяет сконцентрировать внимание не на детальном описании устройства и функционирования каждого отдельного микросервиса, а интерпретировать работу приложения через алгебраический язык отображений. Предложенная интерпретация позволяет через описание модели хотя бы одного микросервиса, имея соответствующий набор морфизмов, построить модель работы программы в среде ее выполнения.

2.4.2 Модель сервиса

При проектировании архитектуры программного обеспечения, основанной на микросервисной модели, одной из наиболее важных задач является задача определение границ ответственности каждого микросервиса. От корректности

решения данной задачи напрямую зависят характеристики системы, такие, как связность, устойчивость к отказам, возможность независимых развертываний и масштабируемость системы. Существует несколько устоявшихся подходов, предлагающих набор принципов для разделения зон функциональной ответственнсти среди микросервисов.

Одной из доминирующих стратегий является декомпозиция функциональности на основе предметной области, базирующаяся на принципах предметно-ориентированного проектирования. В рамках данного подхода структура микросервисов должна отражать бизнес-домены и поддомены организации. Тогда ключевыми конструкциями будут ограниченные контексты, каждый из которых представляет собой четко очерченную часть модели предметной области со своими собственным внутренним языком и моделью данных. Микросервис в такой парадигме инкапсулирует всю логику и данные, относящиеся к одному ограниченному контексту. Такой подход обеспечивает высокую функциональную связность внутри микросервиса и минимизирует необходимость в тесной координации между различными командами разработки.

Другой полезной практикой является принцип единственной ответственности, адаптированный на распределенное устройство системы. В данном контексте он означает, что каждый микросервис должен быть ответственным за одну конкретную бизнес-возможность или функцию и обладать исключительным контролем над соответствующими данными. Изменения в логике данной функциональности должны затрагивать только один сервис, что позволяет снижать сложность и риски при модификации системы.

Проблема тесной связанности микросервисов часто решается через выделение сервиса-оркестратора для управления распределенными транзацкциями, что позволяет избежать прямых жестких зависимостей между микросервисами, взаимодействующими в рамках общего бизнес-процесса. В некоторых случаях оказывается эффективной практика изоляции общих данных, которая подразумевает, что каждый тип данных должен находиться под управлением лишь одного микросервиса, выступающего его единственным источником владения. Любой другой сервис, которому требуются эти

данные, должен получать их через хорошо определенный интерфейс данного сервиса-владельца, либо через реплицированную доступную только для чтения копию данных, синхронизируемую асинхронно. Это предотвращает возникновение распределенной монолитной базы данных и обеспечивает четкие контракты обмена данными.

Несмотря на существование устоявшихся подходов, процесс нарезки микросервисов сопряжен с рядом существенных проблем. Ключевой трудностью является ошибочное определение границ, приводящее к чрезмерно тесной связанности сервисов. Данная проблема проявляется в частых синхронных вызовах между ними, необходимости согласованных изменений в нескольких сервисах и распространении транзакций на границы сервисов, что снижает эффективность распределенной архитектуры. Другой распространенной проблемой является создание слишком маленьких микросервисов, которые слишком мелкие с точки зрения бизнес-логики. Из-за этого решения возникают непропорционально высокие накладные расходы на их оркестрацию, сетевые взаимодействия и мониторинг, что усложняет общее управление системой. Кроме того, некорректное разделение может породить циклические зависимости между сервисами, создавая хрупкую архитектуру, склонную к каскадным отказам.

Вопрос о том, в какой момент существующий микросервис следует подвергнуть дальнейшему разделению, решается на основе ряда критериев. Одним из основных показателей является нарушение принципа единственной ответственности, когда в сервис начинают добавляться новые функции, слабо связанные с его изначальным предназначением. Это ведет к росту его внутренней сложности и снижению связности. Другим важным критерием служит независимость жизненного цикла и требований к масштабированию. Если различные функциональные блоки внутри одного сервиса требуют разного уровня вычислительных ресурсов под нагрузкой или должны обновляться с различной частотой, их разделение становится целесообразным. Техническим индикатором может выступать увеличение времени сборки и развертывания сервиса до неприемлемых величин, что свидетельствует о его чрезмерном разрастании. Критерий независимой развертываемости также является

решающим, если становится невозможным производить развертывание одной части функциональности, не затрагивая другую, что сигнализирует о необходимости пересмотра границ ответственности и принципов нарезки архитектуры системы.

Таким образом, процесс определения границ микросервисов представляет собой итеративный и контекстно-зависимый процесс, требующий глубокого анализа предметной области и технических ограничений. Лучшие практики предлагают руководства для принятия решений, однако окончательный выбор всегда является компромиссом между функциональной связностью, производительностью, устойчивостью к ошибкам и операционной сложностью. Последующие исследования формализуют эти интуитивные понятия, вводя строгие математические модели для описания свойств и функционалов микросервисов, что позволяет перейти от эвристических методов к алгоритмическим подходам в проектировании архитектуры. Данные модели позволяют количественно оценивать такие параметры, как вычислительная мощность, использование памяти и сигнатуры функционалов, закладывая основу для анализа и оптимизации распределенных систем.

Каждый микросервис представим в виде структуры, содержащей конечный набор свойств $Prop$ и конечного множества функционалов F. Пусть тройка $Prop = (C, M_m, M_U)$, где $C-$ вычислительная мощность (количество выполняемых операций в секунду), M_m- доступный объем памяти микросервиса, M_U- используемый объем памяти. В дальнейшем предполагается, что C, M_m, M_U являются натуральными числами, такими, что $M_m \geqslant M_U$. Множество функционалов F представимо в виде объединения непересекающихся множеств P и $\overline{P}$, где $P-$ множество чистых функций. Пусть $f \in P$, тогда для функционала f можно определить его сигнатуру $f : A \to B$, где $A-$ множество входных аргументов, а $B-$ значений. Так как для выполнения вычисления нужны затраты вычислительных ресурсов, и на вычисления требуется некоторое количество времени t, то сигнатуру функционала можно расширить, используя концепцию зависимых типов [17; 19], а именно,

$$f : A \xrightarrow{t} B : m,$$

где $m-$ вектор требуемых ресурсов для выполнения функционала f, а $t-$ количество времени вычисления итогового значения. Пусть $m \in M = \mathbb{N}^2$, тогда тип функционала f представим в иных обозначениях:

$$\Pi(m : (\mathbb{N},\mathbb{N}))A \to B.$$

Рассмотрим описание работы приложения в виде набора цепочек отображений f_i, каждая из которых задает некоторую функцию R :

$$f_1 \xrightarrow{m_1} f_2 \xrightarrow{m_2} f_3 \xrightarrow{m_3} \ldots \xrightarrow{m_{(i-1)}} f_i \xrightarrow{m_i} \ldots \xrightarrow{m_k} f_k => R : \mathbb{N} \to M,$$

такую, что для $i-$го перехода $R(i) = m_i$.

Определение. Аномальным расходом вычислительных ресурсов называется оценка расхода вычислительных ресурсов m_i во время работы, такая, что

$$\frac{||m_i||_M}{\sum_{p \in P} ||m_p||_M} \geqslant c = 2.1,$$

где $P-$ множество моментов перехода от одного сервиса к другому, содержащему треть самых высоких показателей расхода вычислительных ресурсов до выполнения функционала f_i, а $c-$ действительная константа для статической конфигурации приложения. Данная формула известна как амплитудный критерий в гидродинамике. Значение 2.1 взято по аналогии из работ, посвященных исследованию амплитудного критерия [89].В дальнейшем предполагается, что $c = 2.1$, но для некоторых конфигураций устройства архитектуры приложения имеет смысл рассматривать значения более чем 2.1, но не менее.

Замечание. Использование определения аномального расхода вычислительных ресурсов возможно и при динамическом расширении конфигурации приложения. В таком случае нужно обновить содержание множества P, так как при изменении конфигурации накопленные данные о расходе вычислительных ресурсов перестают быть актуальными для новой конфигурации приложения.

Для определения возможности возникновения аномального расхода вычислительных ресурсов нужно определить к какому классу функций относится функция $R(k)$. Согласно следствию теоремы, представленному в

главе 1, для отсутствия возникновения аномального расхода вычислительных ресурсов необходимо, чтобы функция $R(k) \in L_p$, при $p = \{0, 1\}$, тогда для нее верно неравенство:

$$||R(k)||_H \leqslant ||m_{static}||_M (k+1)k,$$

где $H-$ энергетическое пространство, а $m_{static}-$ вектор постоянных значений, характеризующий пороговые значения, фиксирующие наличие изменений в расходе вычислительных ресурсов. Норма для произвольного вектора $v = (v_x, v_y) \in M$ вычисляется по формуле

$$||v||_M = \sqrt{\begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma/2 \\ \gamma/2 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}},$$

где значения констант $\alpha, \beta, \gamma-$ действительные числа, определяемые политикой отслеживания расхода вычислительных ресурсов. Например, пусть расход памяти измеряется в битах, а нужно следить только за расходом памяти в количествах байтов, при этом не важна скорость вычислений. Значит

$$m_{static} = (8, 1), \quad \alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0,$$

тогда $||m_{static}||_M = \sqrt{64} = 8$.

И так, при формировании архитектуры приложения важным аспектом является определение функциональных возможностей, ожидаемых от программного обеспечения. Определив функциональный набор возможностей, удается провести моделирование, позволяющее оценить расход вычислительных ресурсов вне зависимости от конфигурации архитектуры приложения(статической или динамической). При построении архитектуры приложения требуется учитывать: вид политики для контроля расхода вычислительных ресурсов, на основе которой строится формальная система, для доказательства отсутствие возникновения аномального расхода вычислительных ресурсов, исходя из функционального устройства отдельных компонентов всей системы.

2.5 Выводы

В данной главе:

- Представлено применение разработанного метода для ретроспективного анализа волнограммы, полученной из вычислительного эксперимента, описывающего гидродинамическую систему.
- Проведено построение модели, описывающей динамику мнений, в которой удалось показать существование аномалий.
- Продемонстрирована взаимосвязь между возникновением аномалий в эффекте Портевена-Ле Шателье и его выраженностью у разных сплавов металлов.
- Представлена модель устройства архитектуры программного обеспечения, позволяющая учитывать расход вычислительных ресурсов, отличающаяся возможностью гарантирования отсутствия возникновения аномального расхода вычислительных ресурсов при заранее определенной политике контроля расхода ресурсов.

Разработанные методы могут быть применены к широкому классу динамических систем, в частности, описываемых одномерными или многомерными временными рядами. При этом, применение представленного метода ограничено только наличием корректных данных, полученных при измерении какой-либо динамической характеристики интересующей системы. Представленные методы помогают лучше понять устройство исследуемой динамической системы и могут быть использованы для разработки новых предикативных и численных алгоритмов представления характеристических оценок.

ГЛАВА 3. Применение метода к задаче магнитной гидродинамики

В данной главе рассматривается применение разработанного математического аппарата и численного метода для решения магнитогидродинамической задачи. Рассматривается математическая постановка задачи в виде краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных, решение которой редуцируется к одному уравнению для модифицированной функции возмущения свободной поверхности, имеющему решение в виду простой гармоники, основополагающие параметры которой удовлетворяют соответствующему дисперсионному уравнению. На основе представленного метода проводится серия вычислительных экспериментов, позволяющих сделать качественные выводы о топологии устройства динамики и продемонстрировать эффект инверсии магнитного поля.

3.1 Основные направления изучения магнитогидродинамических процессов

Наряду с изучением абстрактной динамической системы большой интерес представляет качественное исследование математических моделей, описывающих конкретные физические явления. Например, изучение динамических процессов при учете характеристик электропроводящий жидкости и воздействия магнитного поля имеет применение в инженерных и биомедицинских науках. Примерами таких магнитных жидкостей являются жидкие металлы, плазма, электролиты и соленая вода. Моделирование поведения потока электропроводящей жидкости в различных геометриях имеет важное значение для инженерных наук, ставя сложные и интересные практические вызовы, преодоление которых, несомненно, принесет значительную пользу. Соответственно, стабилизация динамики с использованием магнитных сил

сопровождается с описанием нелинейных эффектов и сложной топологии системы, что приводит к значительным трудностям, связанными с построением аналитического решения и доказательством его существования.

В работе [42] проводится анализ магнитогидродинамического трехмерного нелинейного конвективного потока наножидкости Максвелла в направлении растягивающейся поверхности. Характеристики теплопередачи исследуются при тепловом излучении, выделении и поглощении тепла и заданном режиме теплового потока. Модель наножидкости включает броуновское движение и термофорез. Размерные нелинейные выражения импульса, энергии и концентрации преобразуются в безразмерные системы путем выбора подходящих переменных подобия. Для безразмерных выражений реализована хорошо известная гомотопическая методика. Влияние различных величин на скорости, температуру и концентрацию изучается графически и подробно обсуждается. Выражения для чисел Нуссельта и Шервуда рассчитываются и рассматриваются в комплексной плоскости. Также видно, что параметр теплового излучения увеличивает температурное поле и скорость теплопередачи. Как итог, удается получить приближенное решение, так как поиск аналитического решения крайне трудная задача потому, что рассматривается трехмерный пространственный случай, изучение которого затруднено из-за векторной природы уравнений. Такой же подход применяется в исследовании [47]. Авторы сопоставляют результаты моделирования двумерной модели с трехмерной: тепловое излучение усиливает поток и теплопередачу в поперечном направлении в трехмерной полости, в то время как магнитное поле оказывает противоположное воздействие. Различия в распределении потока и температуры между двумерной и трехмерной поверхностью видны на средней плоскости XY в поперечном направлении для теплового излучения высокого уровня и слабого магнитного потока и становятся меньше для более слабого теплового излучения и более сильного магнитного потока. В исследовании [97] рассматривается нелинейная модель в виде обыкновенных дифференциальных уравнений для описания процесса распределения энергии. Оказывается, что поле скорости является убывающей функцией параметра скольжения первого порядка.

Гибридные наножидкости привлекли к себе внимание, благодаря своим улучшенным текучим и тепловым свойствам, что делает их пригодными для добычи геотермальной энергии. В исследованиях [12; 37] рассматривается магнито-биоконвекционный поток гибридной наножидкости серебро (Ag) - оксид магния (MgO)− вода в пористой полости, содержащей окситаксические бактерии и заполненной гибридной наножидкостью. В исследовании используется модель [22; 43], основанная на альгинате натрия третьего сорта, и исследуется протекание тока с использованием наночастиц оксида цинка и оксида меди. Электрическое поле и тепловое число Грасгофа существенно влияют на профиль скорости, в то время как присутствие наночастиц оксида меди существенно влияет на тепловой профиль. Похожие результаты получения в работах на основе численных решений [15; 96].

При моделировании процессов в электропроводящей жидкости в некоторых случаях следует учитывать возможное вращение вдоль некоторой оси, а также диссипативные силы магнитного поля, так как в случае вращения угловая частота среды может быть связана со скоростью составляющих среды (сила Кориолиса); а в случае магнитных полей магнитные моменты составляющих среды могут соединяться с внешним магнитным полем (ларморовская прецессия). В рамках кинетической теории такая модель рассмотрена в работе [29], где продемонстрирован тензор анизотропной проводимости, обусловленный вращением, как обычно наблюдается в системе с конечным магнитным полем.

Изучение эволюции магнитного поля в проводящей среде также является важным аспектом всего комплекса геофизических исследований. Большую роль рассматриваемые процессы играют и в различных астрофизических приложениях при исследовании магнитных полей галактик, аккреционных дисков, Солнца, генерация которых объясняется положениями теории динамо. Среди кинематических моделей представляет интерес динамо [84], а также построенное для значений магнитного числа Рейнольдса, меньших критического значения [114]. В работе [109] изучается влияние магнитной проницаемости и электрической проводимости морской среды на индуцированное электромагнитное поле. Численное решение задач кинематического динамо для

модельных течений в разных геометриях представлено, например, в сфере [35; 8], в плоском и сферическом слое. Вследствие того, что генерация магнитного поля может быть обусловлена динамикой различных гидродинамических полей [108], для выяснения действительной картины поля магнитогидродинамических характеристик кинематическая теория является недостаточной, поэтому представляет интерес развитие различных вариантов полной гидромагнитной теории.

У методов моделирования на основе кинематической теории имеется один недостаток. Он заключается в том, что в модель получает в качестве входных параметров значение скорости, что не позволяет рассматривать влияние магнитного поля на скорость, поэтому возникает необходимость в построении более сложной модели.

На настоящий момент достаточно хорошо изучены два основных вида магнитогидродинамического динамо: двух-масштабное и почти симметричное большой проводимости. Большое распространение получило альфа-динамо, где самовозбуждение магнитного поля происходит с преобладающим правовинтовым или левовинтовым движением [40; 62; 8]. В неспиральных полях скорости для действия динамо необходимы большие значения магнитного числа Рейнольдса. В представленном исследовании, в отличие от известных на настоящий момент, при проведении математического моделирования геофизических процессов учитывается полная система магнитогидродинамических уравнений с соответствующими диссипативными факторами. Анализ динамических эффектов в геосредах с учетом неоднородности плотности и сферической топологии граничных поверхностей представлен в [90].

В работе [64] рассматривается излучательный поток несжимаемой вязкой электропроводящей неньютоновской кассоновской гибридной наножидкости по экспоненциально ускоренной вертикальной пористой поверхности. Под влиянием скорости скольжения во вращающейся раме учитывается влияние эффекта Холла и ионного скольжения. Постоянное однородное магнитное поле применяется при постулировании низкого магнитного числа Рейнольдса. Учитывается повышенная температура и изменяющаяся во

времени концентрация на поверхности. Также исследуются последовательные химические реакции первого порядка и поглощение тепла. Наночастицы серебра и титана рассеиваются в базовой жидкой воде, и комбинация этиленгликоля должна образовываться гибридной наножидкостью [12; 43]. Метод преобразования Лапласа применяется к безразмерным управляющим уравнениям для обеспечения аналитических решений замкнутой формы. Графические представления позволяют изучить влияние физических параметров на существенные характеристики потока. Следует отметить, что малое значение магнитного числа Рейнольдса характерно для процессов в лабораторных условиях, но для практических приложений гораздо более характерны сценарии, когда магнитное число Рейнольдса может быть конечным числом, близким к единице. Оцениваются напряжение сдвига, теплопередача и массоперенос на поверхности, выявляются изменения в концентрации частиц и поглощении тепла. Авторы работы [61] рассмотрели стационарный и колебательный режимы магнитной конвекции в зависимости от профиля угловой скорости вращения и от профиля внешнего азимутального магнитного поля, и только благодаря численному анализу удалось продемонстрировать наличие хаотического поведения конвективных потоков и сформулировать критерии их возникновения. Оказывается, что совокупное воздействие магнитного поля, вращения, конвективного нагрева существенно влияет на характеристики потока в канале. Похожие результаты представляются в исследованиях [10; 11; 14; 28; 65].

3.2 Моделирование динамики электропроводящей жидкости

Рассмотрим тонкий слой несжимаемой электропроводящей жидкости, вращающийся с угловой скоростью $\bar{\omega}$, ограниченный снизу непротекаемым твердым дном $z = Z(x,y)$, а сверху свободной поверхностью, заданной относительно отсчетного уровня $z = 0$ функцией $z = h_B(x,y,t)$. Пусть ось вращения жидкости совпадает с осью z, тогда $\bar{\omega} = \mathbf{k}\omega$. Ключевые

уравнения магнитогидродинамики в данной задаче записываются в проекциях на координатные оси и имеют вид (3.1)−(3.8):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{b^2}{2\mu}\right)+$$
$$+2\omega v_y-\frac{1}{\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+b_y\frac{\partial b_x}{\partial y}+b_z\frac{\partial b_x}{\partial z}\right), \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(p+\frac{b^2}{2\mu}\right)+$$
$$-2\omega v_x-\frac{1}{\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x}+b_y\frac{\partial b_y}{\partial y}+b_z\frac{\partial b_y}{\partial z}\right), \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\frac{b^2}{2\mu}\right)-g+$$
$$-2\omega v_x-\frac{1}{\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_z}{\partial x}+b_y\frac{\partial b_z}{\partial y}+b_z\frac{\partial b_z}{\partial z}\right), \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial b_x}{\partial z}-b_x\frac{\partial v_x}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-b_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=\lambda\Delta b_x, \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial b_y}{\partial z}-b_x\frac{\partial v_y}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_y}{\partial y}-b_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=\lambda\Delta b_y, \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial b_z}{\partial z}-b_x\frac{\partial v_z}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_z}{\partial y}-b_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=\lambda\Delta b_z, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=0, \qquad (3.8)$$

где v_x,v_y,v_z− компоненты скорости жидкости, p− давление, g− величина силы тяжести, ρ− плотность, b_x,b_y,b_z− компоненты индукции магнитного поля, $\lambda=\dfrac{1}{\sigma\mu}$, σ− электропроводность среды, μ− магнитная проницаемость, а ω− величина угловой скорости вращения слоя.

Рассмотрим масштабы изменения переменных в уравнениях (3.1) − (3.8). Для этого введем характеристические масштабы: D− движения в вертикальном направлении, величина соответствует средней глубине жидкого слоя $h_B(x,y,t) - Z(x,y)$; L− движения в горизонтальном направлении; U− горизонтальных компонент скорости; W− вертикальный компонент скорости; B− горизонтальных компонент магнитного поля; T− времени; P− поля давления. Длинноволновое приближение соответствует представлению о

значительном преобладании горизонтальной характеристики над вертикальной, обозначим это соотношение за δ, тогда

$$\delta = \frac{D}{L} \ll 1.$$

Рассмотрим уравнение неразрывности (3.7). Заметим, что первое и второе слагаемые имеют одинаковый порядок $O\left(\frac{U}{L}\right)$, значит порядок третьего слагаемого $O\left(\frac{W}{D}\right)$ не превышает $O\left(\frac{U}{L}\right)$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$W \leqslant O(\delta U).$$

Используя аналогичную методику оценки слагаемых уравнения соленоидальности магнитного поля (3.8), получим

$$H \leqslant O(\delta B).$$

Применяя такой подход для оценки слагаемых в уравнениях (3.1) – (3.6), переходя к безразмерным переменным, получим

$$\frac{U}{T}\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{U^2}{L}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho L}\left(P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) + 2\omega U v_y + \frac{B^2}{L\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_x}{\partial z}\right), \quad (3.9)$$

$$\frac{U}{T}\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{U^2}{L}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho L}\left(P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) - 2\omega U v_x + \frac{B^2}{L\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_y}{\partial z}\right), \quad (3.10)$$

$$\frac{\delta U}{T}\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\delta U^2}{L}\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho D}\left(P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) - g + \frac{\delta B^2}{L\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_y}{\partial z}\right), \quad (3.11)$$

$$\frac{B}{T}\frac{\partial b_x}{\partial t} + \frac{UB}{L}\left(v_x\frac{\partial b_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_z}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_z}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_z}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \\ = \frac{\lambda B}{L^2}\Delta b_x, \quad (3.12)$$

$$\frac{B}{T}\frac{\partial b_y}{\partial t} + \frac{UB}{L}\left(v_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_y}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \\ = \frac{\lambda B}{L^2}\Delta b_y, \quad (3.13)$$

$$\frac{\delta B}{T}\frac{\partial b_z}{\partial t} + \frac{\delta UB}{L}\left(v_x\frac{\partial b_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_z}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_z}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_z}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \\ = \frac{\delta\lambda B}{L^2}\Delta b_z. \quad (3.14)$$

Безразмерные переменные имеют соответствующие обозначений и не будут меняться в дальнейшем.

Заметим, что в уравнениях, представляющих горизонтальные проекции уравнение движения, все слагаемые имеют одинаковый порядок, если динамическое, кинематическое и магнитное давления — соизмеримые величины: $P \sim \dfrac{B^2}{\mu} \sim pU^2 \sim \dfrac{\rho U}{T}$. Этот случай будет изучаться в дальнейшем.

Отношение диффузионного члена в уравнениях индукции магнитного поля (3.12)−(3.14) к конвективному члену можно выразить через характеристику скорости движения жидкости U и через значение характеристики длинны L. Это соотношение называется магнитным числом Рейнольдса R_m и имеет следующий вид:

$$R_m = \frac{LU}{\lambda}.$$

Данное соотношение отображает взаимосвязь между потоком электропроводящей жидкости и ее магнитным полем. При проведении практических экспериментов значение магнитного числа Рейнольдса $R_m \ll 1$, что позволяет рассматривать упрощенную задачу, пренебрегая взаимосвязью между движением жидкости и ее магнитным полем. При достаточно большом значении магнитного числа Рейнольдса ($R_m \gg 1$) магнитное поле начинает генерироваться при движении самой среды. Такие физические сценарии больше всего характерны для астрофизических процессов, а так же описания систем, в которых среды

являются сильно электропроводящими с высокими температурами и наличием значительного давления. Уравнение индукции магнитного поля описывает поведение магнитного поля, если известна скорость движения среды, так как магнитные силовые линии способны перемещаться вместе с электропроводящей средой и влияют на характер ее перемещения.

Диффузионные члены в уравнении индукции характеризуют влияние магнитного поля на его генерацию при конечной проводимости среды или при небольших временных масштабах T, и при длинноволновом приближении уравнение индукции сохраняется в неизменном виде.

Чтобы не пренебрегать взаимосвязью между магнитным полем и движением электропроводящей среды, будем предполагать, что диффузионные члены соразмерны с конвективными, то есть, $R_m \sim 1$.

Рассмотрим уравнение (3.11), оставляя в нем только главные члены, тогда получим следующее:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) = -\rho g,$$

проинтегрируем соотношение по z, получая следующее выражение:

$$p + \frac{b^2}{2\mu} = -\rho g z + C(x,y,t).$$

Воспользуясь граничными условиями $p(x,y,h_B) = p_0$, и $b(x,y,h_B) = b_0$, где p_0,b_0- постоянные величины, получим

$$p + \frac{b^2}{2\mu} = p_0 + \frac{b_0^2}{2\mu} - \rho g h_B + z. \tag{3.15}$$

Линейная зависимость правой части выражения (3.15) от z обуславливает независимость от z горизонтального градиента гидромагнитного давления:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) = -\rho g \frac{\partial h_B}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) = -\rho g \frac{\partial h_B}{\partial y}.$$

Следовательно горизонтальные компоненты скорости магнитного поля не зависят от глубины слоя, если нет такой зависимости в начальный момент времени. В дальнейшем будет предполагать, что это свойство выполняется.

Тогда получим из уравнений (3.9) и (3.10):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\rho g\frac{\partial h_B}{\partial y} + 2\omega v_y + b_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_x}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\rho g\frac{\partial h_B}{\partial x} - 2\omega v_x + b_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_y}{\partial y},$$

а также из уравнения неразрывности (3.7), проинтегрировав его по z :

$$v_z(x,y,z,t) = -z\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + a(x,y,t).$$

Воспользуемся равенством нулю нормальной компоненты скорости движения среды на непротикаемой поверхности $z = Z$, тогда

$$v_z(x,y,Z,t) = v_x\frac{\partial Z}{\partial x} + v_y\frac{\partial Z}{\partial y},$$

а также

$$a(x,y,t) = v_x\frac{\partial Z}{\partial x} + v_y\frac{\partial Z}{\partial y} + Z\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right),$$

поэтому

$$v_z(x,y,z,t) = (Z - z)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + v_x\frac{\partial Z}{\partial x} + v_y\frac{\partial Z}{\partial y}. \tag{3.16}$$

Кинематическое условие на поверхности $z = h_B(x,y,t)$ имеет вид

$$v_z(x,y,h_B(x,y,t),t) = \frac{\partial h_B}{\partial t} + v_x\frac{\partial h_B}{\partial x} + v_y\frac{\partial h_B}{\partial y},$$

с учетом равенства (3.16) получим выражение

$$\frac{\partial h_B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h_B - Z)v_x] + \frac{\partial}{\partial y}[(h_B - Z)v_y] = 0.$$

Проинтегрировав уравнение соленоидальности магнитного поля по z получим:

$$b_z(x,y,z,t) = -z\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}\right) + \tilde{a}(x,y,t).$$

На свободной поверхности $z = h_B$ функция b_z удовлетворяет условию:

$$b_z(x,y,h_B,t) = b_{z0}(x,y,t),$$

тогда

$$\tilde{a}(x,y,t) = b_{z0}(x,y,t) + h_B \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right),$$

следовательно,

$$b_z(x,y,z,t) = -(z - h_B) \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + b_{z0}(x,y,t). \tag{3.17}$$

При учете краевого условия для b_z на непротекаемой поверхности $z = Z(x,y)$:

$$b_z(x,y,Z,t) = b_{z0}^{(e)}(x,y,t),$$

и равенства (3.17) и последнего утверждения следует соотношение:

$$(h_B - Z) \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) - b_{z0}^{(e)}(x,y,t) + b_{z0}(x,y,t) = 0.$$

Итак, применяя длинноволновое приближение $\delta \ll 1$, получим систему

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega v_y - g\frac{\partial h_B}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_x}{\partial y} \right), \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2\omega v_x - g\frac{\partial h_B}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial y} \right), \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial h_B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h_B - Z)v_x] + \frac{\partial}{\partial y}[(h_B - Z)v_y] = 0, \tag{3.20}$$

$$(h_B - Z) \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) - b_{z0}^{(e)}(x,y,z) + b_{z0}(x,y,t) = 0, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_x}{\partial y} - b_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta_2 b_x, \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_y}{\partial y} - b_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta_2 b_y. \tag{3.23}$$

В сравнении редуцированной системы с исходной (3.1)−(3.8) у нее меньшее количество динамических уравнений и независимых переменых, так как за счет модельных приближений удалось исключить v_z,b_z из первоначальной системы. Искомые функции v_x,v_y,b_x,b_y,h_B зависят только от переменных x,y,t, при этом функции v_z,b_z линейно зависимы от z. Поэтому обозначение

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

используется для описания двумерного оператора Лапласа.

К уравнениям (3.18)−(3.23) нужно добавить граничные условия непротекания через вертикальные границы области, а также задание магнитного поля на них:

$$v_x \cos(\mathbf{n},\mathbf{x}) + v_y \cos(\mathbf{n},\mathbf{y}) = 0,$$
$$b_x = b_x^{(L)}, \quad b_y = b_y^{(L)}, \qquad (x,y) \in L, \tag{3.24}$$

где $\mathbf{n}-$ нормаль к горизонтальному сечению границы области. Рассмотрим функцию полной глубины H, определяемую формулой

$$H = h_B - Z.$$

Применим теорию малых возмущений, для этого введем постоянный стационарный фон $H_0(x,y)$, тогда справедливо следующее соотношение для функции H :

$$H(x,y,t) = H_0(x,y) + \eta(x,y,t), \tag{3.25}$$

где $\eta(x,y,t)-$ малое возмущение, удовлетворяющее неравенству

$$\eta \ll H_0.$$

С использованием метода малых возмущений линеаризуем систему дифференциальных уравнений. Будем искать решение системы (3.18)−(3.23) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(x,y,t), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'(x,y,t), \tag{3.26}$$

считая, что малые возмещения горизонтальной скорости $\mathbf{v}'$, горизонтального магнитного поля $\mathbf{b}'$ распространяются по некоторому стационарному однородному фону, описываемому постоянными величинами $\mathbf{v}_0,\mathbf{b}_0$.

Подробнее рассмотрим случай при $\mathbf{v}_0 = 0$. Подставив соответствующие выражения в уравнения (3.18)−(3.23) и проведя процесс линеаризации, то есть, оставив главные слагаемые первого порядка малости по $\mathbf{v}'(x,y,t),\mathbf{b}'(x,y,t),\eta$,

получим систему уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \alpha v_y = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho}Db_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha v_x = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho}Db_y, \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[H_0 v_x] + \frac{\partial}{\partial y}[H_0 v_y] = 0, \tag{3.28}$$

$$H_0\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}\right) - b_{z0}^{(e)}(x,y,z) + b_{z0}(x,y,t) = 0, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = Dv_x + \frac{1}{R_m}\Delta_2 b_x, \qquad \frac{\partial b_y}{\partial t} = Dv_y + \frac{1}{R_m}\Delta_2 b_y, \tag{3.30}$$

где $\alpha = 2\omega$, а

$$D = b_{0x}\frac{\partial}{\partial x} + b_{0y}\frac{\partial}{\partial y}$$

является дифференциальным оператором. Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\eta}(x,y,t), \tilde{b}_x(x,y,t), \tilde{b}_y(x,y,t), \tilde{\tilde{\eta}}(x,y,t), \tilde{\tilde{b}}_x(x,y,t), \tilde{\tilde{b}}_y(x,y,t),$$

определяемые следующими равенствами:

$$\eta(x,y,t) = -\frac{1}{g}D_t\left(D_t^2 + \alpha^2\right)\tilde{\eta}(x,y,t),$$
$$b_x(x,y,t) = \mu\rho D_t\left(D_t^2 + \alpha^2\right)\tilde{b}_x(x,y,t),$$
$$b_y(x,y,t) = \mu\rho D_t\left(D_t^2 + \alpha^2\right)\tilde{b}_y(x,y,t),$$
$$\tilde{\tilde{\eta}} = D_t\tilde{\eta}, \quad \tilde{\tilde{b}}_x = D_t\tilde{b}_x, \quad \tilde{\tilde{b}}_y = D_t\tilde{b}_y,$$

где $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, а также оператор F, определяемый следующей формулой:

$$F = \mu\rho D_t(D_t^2 + \alpha^2)\left(D_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) - D^2 D_t.$$

Тогда система (3.27) – (3.30) редуцируется к уравнению для функции $\xi(x,y,t)$– модифицированной функции возмущения свободной поверхности:

$$D(D_t^2 + \alpha^2)^2\left(\left(D_t - \frac{\Delta}{R_m}\right)D_t - \frac{D^2}{\mu\rho}\right)\xi = \frac{b_{z0}^{(e)} - b_{z0}}{H_0(\mu\rho)^2}. \tag{3.31}$$

Подробно метод редукции изложен в [5]. После решения уравнения (3.31) оставшиеся неизвестные функции будут найдены, так как каждая из них выражается через функцию $\xi(x,y,t)$.

В работе [54] доказано существование решения этого уравнения в виде гармонической волны

$$\xi = \mathrm{Im}(A\exp(i(kx + ly - \sigma t)))$$

как для конечных, так и для бесконечного значений магнитного числа Рейнольдса, причём частота колебаний определяется из следующего дисперсионного соотношения:

$$(kb_{0x} + lb_{0y})\left(k^2 + l^2\right)\left(\alpha^2 - \sigma^2\right)^2 \times$$
$$\times\left(\sigma^2 + \sigma\frac{i\left(l^2 + k^2\right)}{R_m} - \frac{\left(kb_{0x} + lb_{0y}\right)^2}{\mu\rho}\right) = \frac{\widetilde{B}^2}{\widetilde{H}_0(\mu\rho)^2}, \qquad (3.32)$$

где $\widetilde{H}_0$ и $\tilde{B}-$ амплитуды невозмущённой глубины слоя и разности значений вертикальной компоненты магнитной индукции на ограничивающих жидкий слой поверхностях, соответственно.

При совпадении амплитуд индукции магнитного поля на ограничивающих жидкий слой поверхностях дисперсионное уравнение имеет следующие решения:

$$\sigma_{1,2,3,4} = \pm\alpha, \quad \sigma_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} - \frac{(k^2 + l^2)^2}{4(R_m)^2}} - i\frac{k^2 + l^2}{2R_m},$$

которые, как можно заметить, не зависят от амплитуды невозмущенной глубины слоя жидкости. Для частоты σ возникают две четко разделяющиеся ветви. Первый тип колебаний − инерционная волна, в которой определяющую роль играют инерция и сила Кориолиса, способствующие сохранению устойчивого волнового режима. Второй вид колебаний − магнитные волны с комплексным значением частоты, мнимая часть которых при любых конечных значениях магнитного числа Рейнольдса отрицательная, а значит магнитные волны не приводят к нарушению устойчивости динамического процесса.

Следует также отметь, что при достаточно больших значениях магнитного числа Рейнольдса мнимая часть колебаний стремится к нулю, что способствует возникновению установившегося во времени геофизического процесса и существованию индуцированного магнитного поля на протяженном временном интервале.

Для характеристического анализа неоднородного дисперсионного соотношения следует найти корни $\tilde{\sigma}$ полинома $P_n(\sigma)$. Решение этой задачи рассматривается в следующей главе диссертационной работы.

Уравнения (3.1) – (3.6) можно переписать в векторном виде [51]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla)\bar{v} = \dfrac{\nabla p}{\rho} - 2\left[\bar{\omega}, \bar{v}\right] - \bar{g}z + \dfrac{1}{\mu\rho}\left[rot(\bar{b}), \bar{b}\right], \\ \dfrac{\partial \bar{b}}{\partial t} = rot\left[\bar{v}, \bar{b}\right] + \dfrac{1}{\mu\sigma}\Delta\bar{b}, \end{cases} \tag{3.33}$$

где $\bar{v}-$ скорость жидкости, $p-$ давление, $\bar{g}-$ величина ускорения силы тяжести, $\rho-$ плотность жидкости, $\bar{b}-$ индукция магнитного поля, $\mu-$ магнитная проницаемость, $\sigma-$ электропроводность среды, $\bar{\omega}-$ угловая скорость. Для проверки существования аномалий в системе (3.33), зафиксировав локализацию проведения измерений, то есть, рассматривая в пространстве некоторую точку с коррдинатами (x_0, y_0, z_0), можно получить закон, согласно которому действует динамический оператор D_t :

$$D_t(\bar{v} + \bar{b}) = -2\left[\omega, v\right] - gz_0, \tag{3.34}$$

где правая часть уравнения соответствует образу динамического оператора $D_t \in \mathfrak{K}_2$. Можно заметить, что для данной системы не выполняется необходимое условие отсутствия возникновения аномального явления, а значит в этой динамической системе могут возникать аномалии.

3.3 Проведение вычислительных экспериментов

Итоговая модель имеет физические входные параметры: A – амплитуда гармоники, H – значение невозмущенной глубины слоя, g – силы тяжести, α – параметр Кориолиса, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность, R_m – магнитное число Рейнольдса, k и l – волновые числа, b_{0x} и b_{0y} – проекции вектора магнитной индукции внешнего поля на оси x и y, $b_{n0}^{(e)}$ – нормальная компонента

вектора магнитной индукции на ограничивающей жидкий слой поверхности, ΔZ – оператор Лапласа, примененный к граничной поверхности Z слоя. Пусть $\widetilde{\sigma} = \sigma_1 + i\sigma_2$, тогда решение ξ представимо в виде суммы гармоник

$$\xi = A\sin(kx + ly - \sigma_1 t)e^{\sigma_2 t}.$$

Знак мнимой части $\widetilde{\sigma}$ определяет динамику гармоники. Если $\sigma_2 < 0$, то гармоника затухает, при $\sigma_2 > 0$ наблюдается неустойчивый режим, а при $\sigma_2 = 0$ следует существование периодического режима.

При изучении зависимости $\widetilde{\sigma}$ от исследуемого физического параметра на отрезке $[0.01; 20]$ значения остальных физических параметров фиксировались равными единице, кроме $g = 9.8$, с шагом $h = 0.2$.

На рисунках, представленных ниже, показана графическая интерпретация зависимости $\widetilde{\sigma}$ от исследуемого параметра, где верхняя пара ячеек показывает распределение $\widetilde{\sigma}$ для неоднородного уравнения, а нижняя пара отображает распределение $\widetilde{\sigma}$ для соответствующего однородного уравнения при $\widetilde{B} = 0$. Правые графики показывают изменение $Im(\widetilde{\sigma})$, а левые $-Re(\widetilde{\sigma})$.

На рисунке (3.1) представлены зависимости $\widetilde{\sigma}$ от параметра Кориолиса. Верхняя пара распределений практически неотличима от нижней при больших значениях параметра Кориолиса, следовательно, при быстром вращении слоя внешнее магнитное поле и рельеф донной поверхности оказывают несущественное влияние на динамику процесса внутри жидкого объёма. С ростом α ветки корней σ_2 приобретают асимптотическое поведение, что приводит к периодическому режиму. При достаточно малом влиянии силы Кориолиса на динамический процесс, что соответствует, например, нулевому значению параметра $\alpha = 0$, редуцированное магнитное поле затухает.

Визуализация распределения $\widetilde{\sigma}$ от волнового числа k представлена на рисунке (3.2). При малых значениях волнового числа k наблюдается значительное расхождение значений вещественной части частоты колебаний, обусловленное действием внешнего магнитного поля и изменением невозмущенной глубины, но расхождение сглаживается с ростом значения волнового числа, приводя к затуханию динамического процесса.

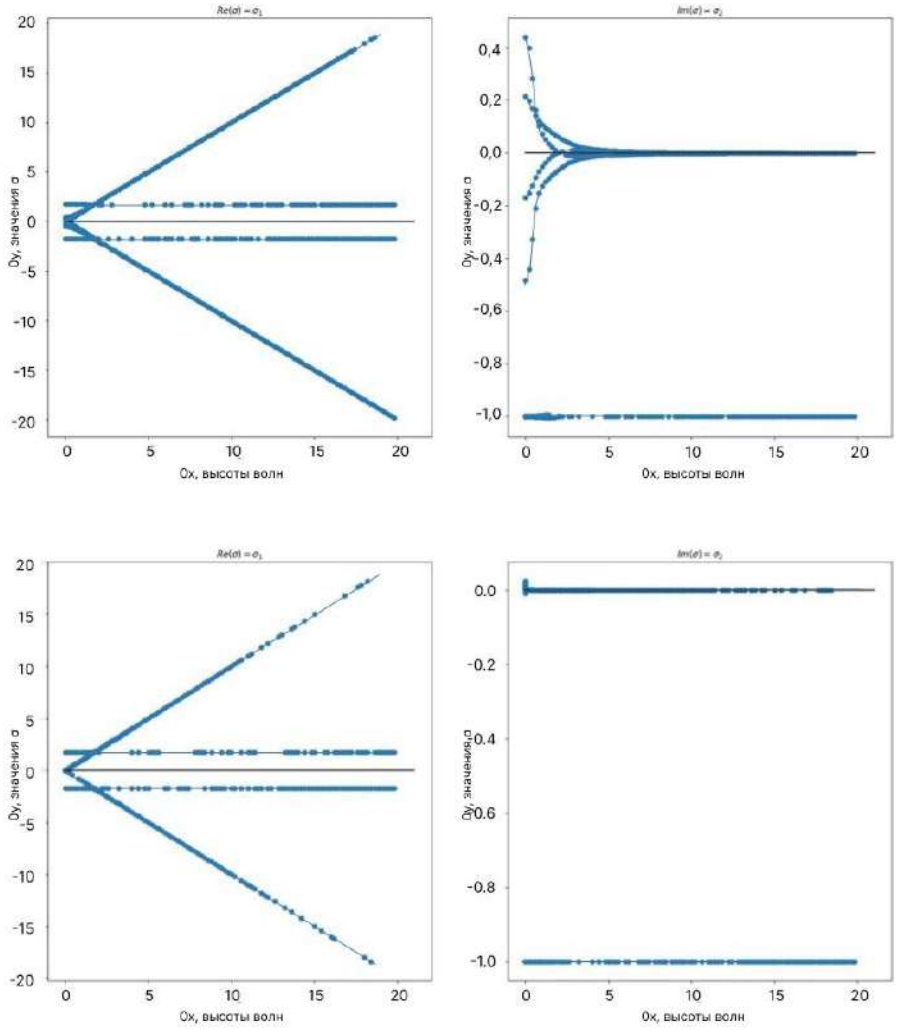


Рисунок 3.1 — Зависимость корней от параметра Кориолиса

Наиболее существенные отличия распределения решений неоднородного дисперсионного уравнения от однородного видны на рисунках (3.3) и (3.4). В первом случае ярко выражены шесть ветвей корней, но только четыре ветви с отсутствием положительных значений мнимой части частоты для однородного уравнения, следовательно, диффузия магнитного поля при разных амплитудах его внешнего воздействия на слой жидкости переменной глубины не приводит к затуханию динамического процесса внутри жидкого объема, и на достаточно небольшом временном промежутке возникает неустойчивый режим, например при $R_m > 2$.

На рисунке (3.5) представлена графическая визуализация построенного решения, определяющего гидродинамический процесс, при $R_m = 1$, из которой

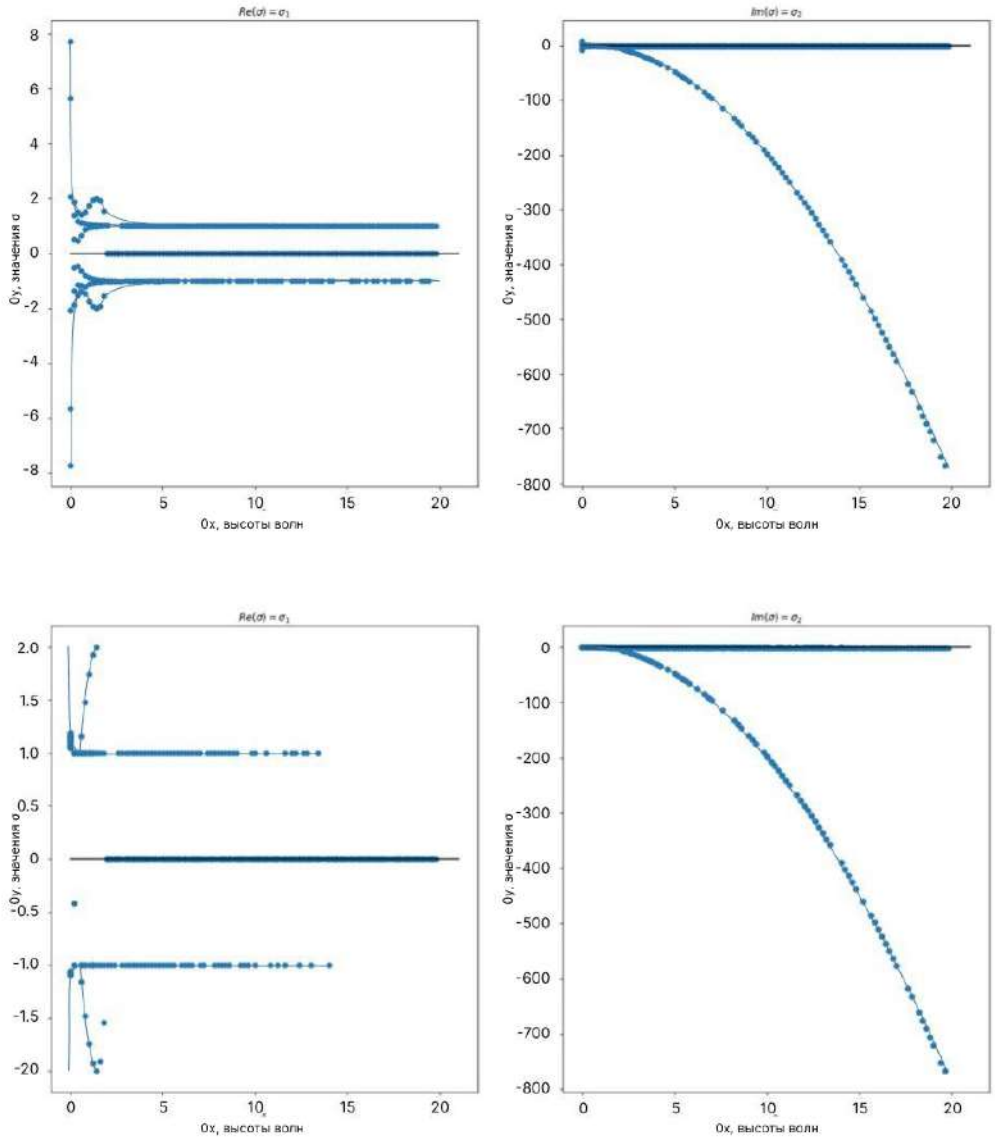


Рисунок 3.2 — Зависимость корней от волнового числа

видно, что на достаточно небольшом временном промежутке существует вполне периодический режим а при $t \to \infty$ процесс приобретает неустойчивый характер. При уменьшении значения магнитного числа Рейнольдса будет увеличиваться время существования периодического режима, что демонстрируется на рисунке (3.6). Данный результат был получен при $Rm = 0.01$. Из представленной визуализации динамики процесса можно сделать вывод о том, что на достаточно

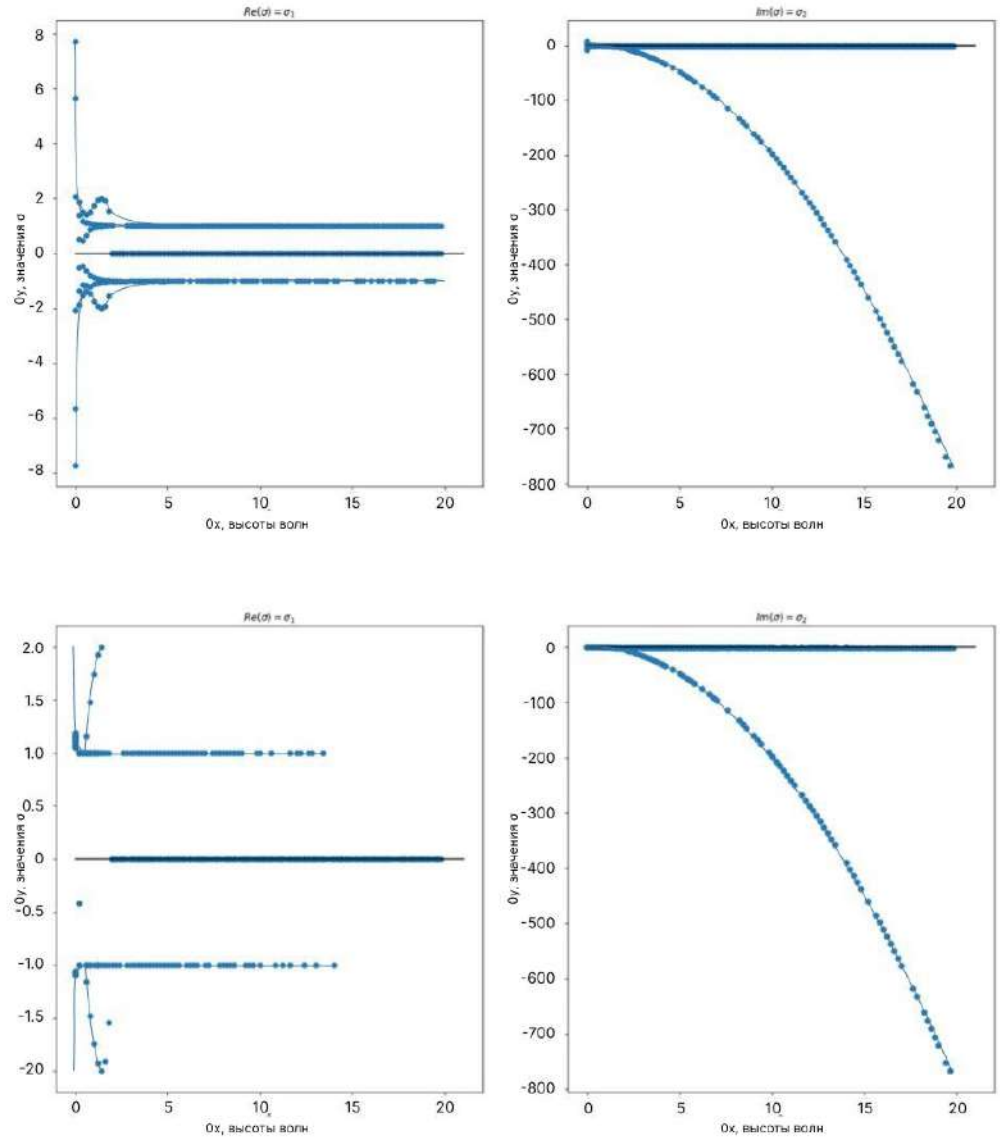


Рисунок 3.3 — Зависимость корней от магнитного числа Рейнольдса

малом временном промежутке может существовать периодический режим, при этом может наблюдаться даже затухание динамического процесса, который обязательно в дальнейшем приобретет неустойчивый характер.

Кроме того, из рисунка (3.3) видно, что существуют $\sigma_2 > 0$, для неоднородного уравнения поэтому на большом временном промежутке не возникает устойчивых режимов. Согласно основной теореме алгебры, у $P_n(\sigma)$ существует хотя бы один комплексный корень, следовательно, у процесса с учетом эффекта диффузии магнитного поля не может быть периодического режима при $t \in [0, +\infty)$, так как для его существования требуется, чтобы $\forall\ \widetilde{\sigma}\ \in\ \mathbb{R}$.

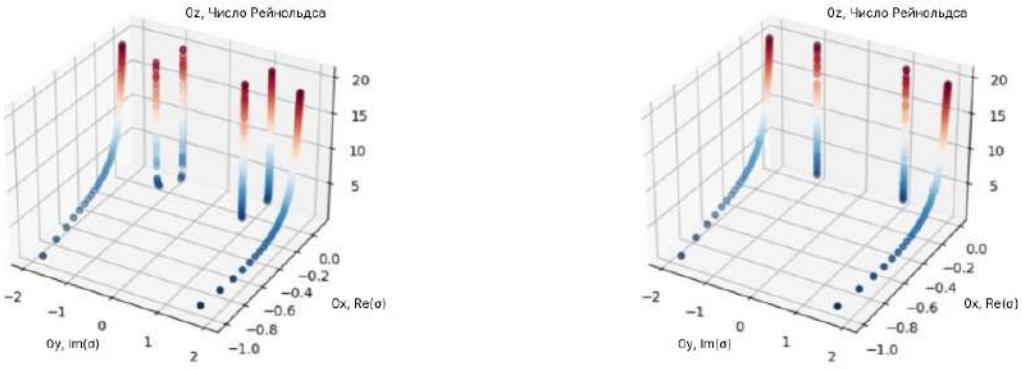


Рисунок 3.4 — Визуализация зависимости корней от магнитного числа Рейнольдса

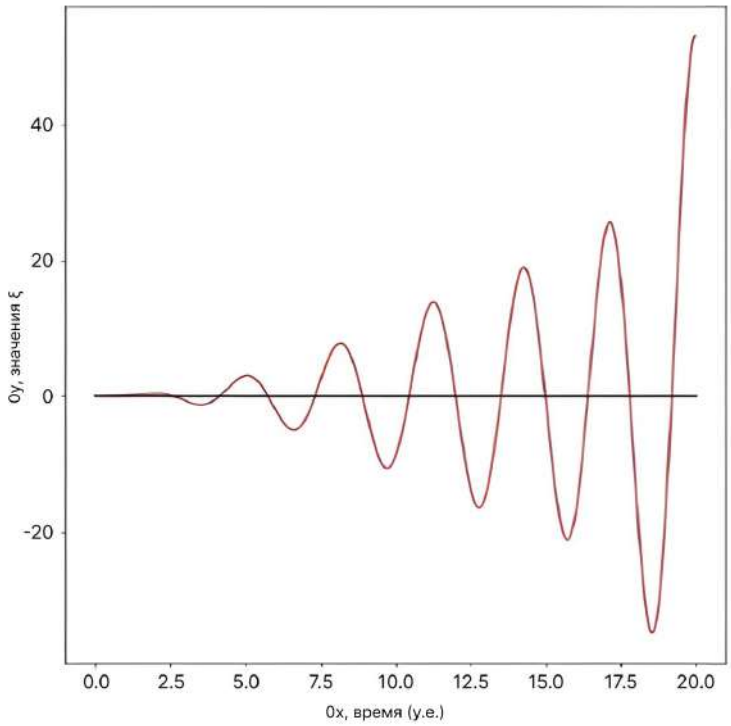


Рисунок 3.5 — Динамика процесса при $R_m = 1$

По всей видимости, возможны случаи, в которых на некотором, достаточно небольшом временном промежутке, формируется периодическое поведение за

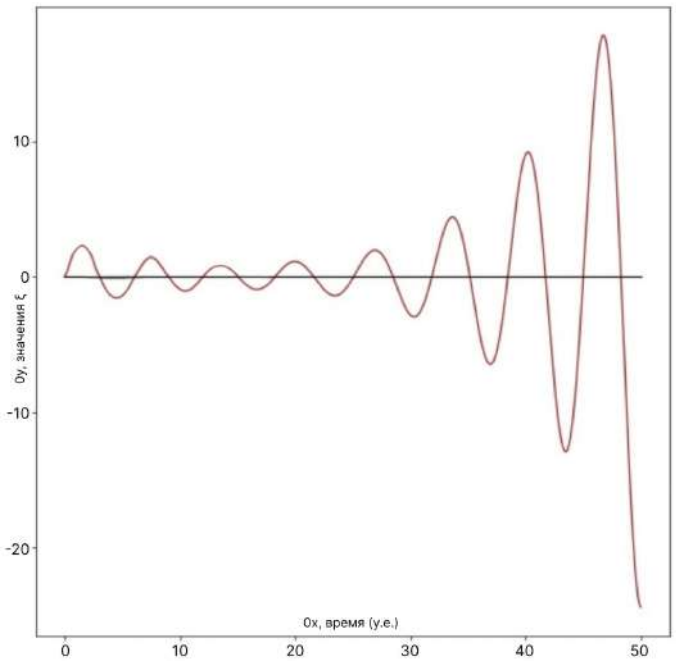


Рисунок 3.6 — Динамика процесса при $R_m = 0.1$

счет разных фаз накладывающихся гармоник, при этом такое возможно только в начальный временной промежуток, так как затем гармоники, отвечающие за неустойчивую динамику возрастают по модулю с экспоненциальной скоростью, а устойчивые напротив, убывают с обратно пропорциональной скоростью.

В работе [51] рассматривается метод и предоставляется алгоритм решения уравнения (3.32), что позволило провести анализ эволюции магнитогидродинамических характеристик в зависимости от магнитного числа Рейнольдса [52]. Примем далее значения волновых чисел $k = l = 1$, а проекции внешнего магнитного поля на оси x,y – $b_{0x} = 0, b_{0y} = 1$, соответственно. Тогда компоненты вектора скорости примут вид

$$v_x = \sigma\left(\eta + \widehat{b}_x\right) + i\alpha\left(\eta + \widehat{b}_y\right),$$

$$v_y = \sigma\left(\eta + \widehat{b}_y\right) - i\alpha\left(\eta + \widehat{b}_x\right),$$

$$v_z = \left(\frac{-i\sigma}{H_0 g} \left(\sigma^2 + \alpha^2 \right) \eta + v_x \frac{\partial H_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) (z - Z) + v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + v_y \frac{\partial Z}{\partial y},$$

где H_0 – функция невозмущенной глубины, а функции $\eta, \widehat{b}_x, \widehat{b}_y$ имееют следующий вид:

$$\eta = \left(\alpha^2 + \left(\mu\rho \left(\alpha^2 - \sigma^2 \right) \left(-i\sigma + \frac{2\alpha^2}{R_m} \right) - i\sigma \right)^2 \right) \xi,$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{b}_x \\ \widehat{b}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\alpha^2 - \sigma^2 \right) \left(\left(\alpha\mu\rho - i\mu\rho\sigma \right) \left(-i\sigma + \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi \\ \left(\alpha^2 - \sigma^2 \right) \left(\left(\alpha\mu\rho + i\mu\rho\sigma \right) \left(i\sigma - \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi \end{bmatrix}.$$

Компоненты вектора магнитной индукции

$$b_x = \mu\rho \left(\alpha^2 - \sigma^2 \right)^2 \left(\left(\alpha\mu\rho - i\mu\rho\sigma \right) \left(-i\sigma + \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi,$$

$$b_y = \mu\rho \left(\alpha^2 - \sigma^2 \right)^2 \left(\left(\alpha\mu\rho + i\mu\rho\sigma \right) \left(i\sigma - \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi,$$

$$b_z = i \left(h_B - z \right) \left(b_x + b_y \right).$$

На рисунке (3.7) показана эволюция магнитного поля в плоскости xOy, начало динамики которого представлено на изображении в левом верхнем квадранте, и заключение − на изображении в правом нижнем квадранте.

Видно, что процесс имеет выраженную периодическую структуру, при этом через регулярный промежуток времени происходит резкая смена направления течения силовых линий. Такое же поведение магнитного поля описывается в теории контрастных структур. Например, в работе [84] рассматривается кинематическая модель, представляющая структуру галактического магнитного поля, в которой также возникает инверсия магнитного поля. Это явление, как правило, регистрируется в тонком слое, прилегающем к границе подобластей с разными знаками векторного поля магнитной индукции. Именно в этом пограничном слое градиент поля имеет большое значение и меняет знак. Представленный анализ также демонстрирует существование у векторного поля магнитной индукции особых точек двух типов, а именно, узла и седла, причем

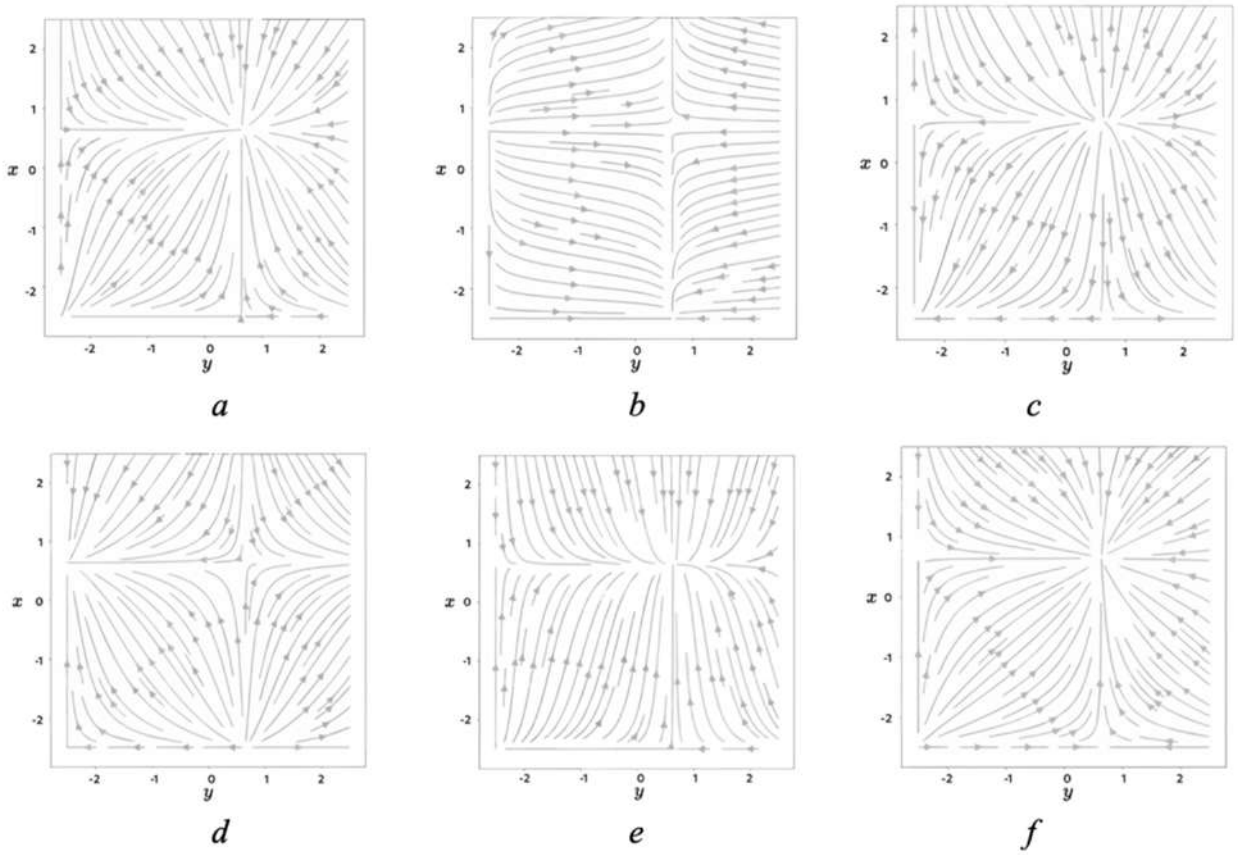


Рисунок 3.7 — Эволюция магнитного поля(a-f): начало(a), середина (b)-(e) и окончание (f) процесса

узел, будучи устойчивым в некоторый момент времени, переходит с течением времени в неустойчивое состояние.

3.4 Выводы

В главе проведен анализ геофизических процессов во вращающейся электропроводящей жидкости с учетом топографических особенностей и диссипативных факторов диффузии магнитного поля. Основные выводы главы:

- Произведен качественный и численный анализ динамики идеальной вращающейся электропроводящей жидкости переменной глубины при изменении значения магнитного числа Рейнольдса, параметра Кориолиса и волнового числа, как при наличии внешнего магнитного поля, так и при его отключении.
- При моделировании эволюции магнитного поля было зафиксировано явление инверсии магнитного поля с некоторой периодичностью.
- При совпадении амплитуд индукции магнитного поля на ограничивающих жидкой слой поверхностях на достаточно длительном временном промежутке будет сформирован периодический режим. В общем же случае может быть как рост, так и затухание динамического процесса. Отключение внешнего магнитного поля не приводит к затуханию магнитогидродинамического процесса внутри системы.
- При быстром вращении слоя внешнее магнитное поле и рельеф донной поверхности оказывают несущественное влияние на динамику процесса внутри жидкого объёма, а при малых значениях параметра Кориолиса внешнее магнитное поле совместно с изменением рельефа донной поверхности приводят к возникновению неустойчивых состояний жидкого слоя.

Результаты исследования могут быть использованы в геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли, а также при решении задач определения гидродинамических характеристик морской среды, оценки параметров волновых возмущений по электромагнитному полю, индуцированному соответствующим гидродинамическим волнением, содержащему информацию о физических характеристиках шельфовой зоны,

что является важным аспектом знаний для геологоразведочных исследований электромагнитных явлений в морской среде с целью определения их взаимосвязи с физическими процессами, протекающими в геофизических системах.

ГЛАВА 4. Технологии и алгоритмы

Корректная разработка программного обеспечения определяет его надежность, производительность и способность к развитию продукта, основывается на двух фундаментальных составляющих. Первая составляющая связана с глубокой проработкой алгоритмического ядра, а также обоснованным и корректным выборе технологического стека. Значимость первой составляющей заключается в формировании детализированных и строго формализованных алгоритмов, образующих ядро любого приложения. Их осмысленное проектирование позволяет не только гарантировать корректность реализации целевой функциональности, но и произвести априорный анализ вычислительной сложности, спрогнозировать поведение системы в предельных режимах работы и граничных случаях, а также заложить основы для ее последующей оптимизации и масштабирования. Второй, не менее важный аспект — проведение сравнительного анализа различных технологий для формирования оптимального технологического стека — определяет каким образом разработанные алгоритмы будут воплощены в реальной программной среде. Современная экосистема инструментов разработки предлагает множество альтернативных решений для реализации похожей функциональности, каждое из которых обладает уникальным набором характеристик в отношении производительности, надежности, поддерживаемости, зрелости сообщества и скорости обучения для новичков. Следовательно, выбор конкретных технологий, языков программирования, фреймворков и систем хранения данных не может быть произвольным, он должен являться результатом системного исследования, основанного на сопоставлении функциональных и нефункциональных требований к программному комплексу с объективными возможностями и ограничениями рассматриваемых кандидатов. Такой подход позволяет минимизировать технические риски, избежать преждевременной оптимизации, препятствовать формированию технического долга, а также обеспечить долгосрочную жизнеспособность программного продукта.

Функциональные требования к технологическому стеку определяют принципиальную возможность технологий решать заявленные задачи проекта. К ним относятся, например, поддержка определенных типов данных и структур, таких как, геопространственные данные в системе управления базы данных PostgreSQL с расширением PostGIS или наличие встроенных механизмов для реализации специфических протоколов связи, таких как gRPC для высокопроизводительного межсервисного взаимодействия в микросервисной архитектуре. Следует упомянуть о необходимости конкретного програмного интерфейса приложения, поддерживающего необходимые стандарты шифрования, встроенные инструменты для обработки потоковых данных или элементы функциональности машинного обучения. Выбор стека, который функционально не покрывает ключевые сценарии использования, делает проект нереализуемым в его первоначальной концепции без дорогостоящей замены компонентов на более поздних стадиях.

Нефункциональные требования имеют не менее критическое значение, так как определяют качественные характеристики системы и ее эксплуатационные свойства. В эту категорию входят: производительность и масштабируемость, надежность, безопасность, сопровождаемость и тестируемость, интегрируемость, а также зрелость технологии.

На операционном уровне, особенно в контексте построения отказоустойчивых распределенных систем, критическую роль играют проверенные архитектурные паттерны, такие как «Автомат защиты от сбоев» для предотвращения каскадных отказов при нестабильности внешних сервисов или «Плавающий журнал событий» для обеспечения целостности данных и полной воспроизводимости состояний системы в любой момент времени. Выбор технологий, которые имеют встроенную поддержку подобных паттернов или, как минимум, не создают непреодолимых препятствий для их реализации, является признаком глубоко обоснованного и зрелого проектного решения. В этом же ключе использование неизменяемых структур данных и заимствование практик функционального программирования для критических по надежности участков

кода позволяет кардинально снизить количество трудноуловимых ошибок, связанных с разделяемым изменяемым состоянием и побочными эффектами.

Таким образом, синергетическое сочетание строгой алгоритмической проработки и методологически выверенного выбора технологий создает прочный фундамент для создания конкурентоспособного и эффективного программного комплекса. И так необходимо изучение как теоретических аспектов проектируемых алгоритмов, так и выбор наилучших тенхнологических предложений для формирования наиболее эффективной инфраструктуры проекта.

Данная глава посвящена устройству программного комплекса и алгоритмов, реализованных в нем. Проводится сравнительный анализ для оптимального выбора технологического стека при реализации функциональности программного комплекса.

4.1 Технологии

При разработке программы важную роль играет выбор архитектуры приложения и языков программирования, для наиболее эффективной реализации нужной функциональность. В диссертационном исследовании выбирается монолитная мультиязычная архитектура приложения. Работу любой программы можно разделить на два вида функциональности: сильно нагружающие процессы и легковесные. Первая категория характеризуется большим количеством операций, нуждающихся в значительном количестве выделенной памяти, с целью получения требуемых результатов. Вторая категория функциональности является противоположностью первой, а именно, подразумевает относительно небольшое количество операций и не нуждается в значительном объеме выделенной памяти. Разделение на две категории формирует более эффективный подход к разработке приложения, так как подразумевает реализацию первой категории функциональности на выскоуровневых языках программирования,

позволяющих производить наиболее эфективные вычисления, а второй — на скриптовых языках программирования. Для реализации легковесной функциональности был выбран язык программирования Python и его библиотеки: NumPy, Pandas, Matplotlib, SciPy, — из-за простоты и широкой известности.

В области программирования выкопроизводительных систем разработчики сталкиваются с множеством вариантов выбора языков для новых проектов. Среди различных вариантов высокоуровневых языков программирования, позволяющих эффективно управлять ресурсами, выделяются C++ и Rust. Каждый из этих языков имеет свои преимущества, что делает их привлекательными для различных специалистов. История C++ началась в коммерческом секторе в 1985 году, в то время как первый стабильный релиз Rust был выпущен лишь через 30 лет, в 2015 году.

Язык C++ характеризуется высокой эффективностью и надежностью, что находит отражение в его широком применении в системном программировании, разработке видеоигр и создании современных приложений, работающих на различных операционных системах. Одним из основных факторов, определяющих выбор разработчиков в пользу C++, является его производительность, масштабируемость и обратная совместимость с C. Также серьезным преимуществом является наличие стандартной библиотеки шаблонов C++ (STL), которая позволяет значительно облегчить часть задач, связанных с обработкой различных данных.

С другой стороны, Rust представляет собой многопарадигменный, компилируемый язык программирования, который может считаться современным вариантом или, в некотором смысле, продолжением C и C++. Язык программирования Rust отличается статической и строгой типизацией и представляет собой функциональный язык, который использует синтаксис, похожий на C++. Основное внимание в Rust уделяется принципам безопасности, что позволяет создавать стабильный и расширяемый асинхронный код. Язык находит применение в широком спектре областей, включая общие задачи

программирования, веб-разработку, анализ данных, видеоигры, проекты в сфере дополненной и виртуальной реальностях, а также в блокчейн-технологиях.

Одной из ключевых особенностей языка программирования Rust является система «заимствований» и «владения», что позволяет обходиться без систем сборки мусора во время исполнения программы. В рамках системного программирования поведение конкурирующих потоков в процессе разработки часто подвержено ошибкам, что приводит к потере данных и нарушениям целостности системы. Использование потоков позволяет различным компонентам программного обеспечения выполняться одновременно, однако согласование их выполнения приводит к некоторым сложностям в устройстве и анализе программного кода. Rust гарантирует безопасную работу потоков, что критически важно для функционирования микросервисных приложений.

Дизайн языка программирования Rust основывается на принципе владения, согласно которому любая информация может находиться в единоличном владении только одной переменной в любой момент времени. Компиляционные единицы в Rust называются «крейтами», которые представляют собой атомарные единицы кода для компилятора Rust. Компилятор Rust не допускает компиляции программ, которые пытаются использовать память ненадлежащим образом. Благодаря синтаксису и языковым конструкциям, компилятор Rust предотвращает проблемы, связанные с потоками и памятью, а именно, позволяет решить такие проблемы как нулевые или «висячие» указатели, или «гонки» данных.

Статический анализатор в компиляторе Rust, известный как «Анализатор владения»(borrow checker), завершает компиляцию до того, как небезопасный код может привести к ошибке в управлении памятью. Разработчики обязаны решать данные проблемы на ранних этапах разработки. Анализатор владения проверяет, каким образом владение значениями может изменяться на протяжении жизненного цикла программы. Значения, находящиеся в одном месте, могут быть временно одолжены другими частями кодовой базы. Данная система правил помогает предотвратить «гонки» данных в конкурентном коде.

Компилятор также управляет распределением владения и выделением памяти среди объектов, чтобы избежать проблем в ходе их выполнения. Безопасность управления памятью исключает переполнение буфера и обеспечивает защиту от ряда ошибок, связанных с доступом к памяти. Это означает, что, к примеру, увеличение количества кода на Rust в приложениях, работающих в браузере, способствует снижению фронта потенциальных атак и уменьшает количество уязвимостей. Данный язык программирования сопоставим по скорости и эффективности с C++/C, однако, является более стабильным и безопасным при работе с памятью [95], основанным на управлении ссылками. Данные принципы позволяют рассматриваемому языку программирования использоваться для разработки ядер операционных систем.

Кроме того, Rust предлагает мощные абстракции, которые упрощают разработку и настройку проектов. Инсталлятор языка программирования Rust создает необходимые условия для разработки и кросс-компиляции, обеспечивая наличие всех элементов, необходимых для создания бинарных файлов на Rust, в одном пакете.

Как итог, для реализации высоконагруженной функциональности выбирается язык программирвоания Rust, так как он обеспечивает низкоуровневый контроль над ресурсами с гарантиями безопасности состояния памяти и потоков, благодаря строгим правилам. Компилятор Rust проверяет соблюдение этих правил, чтобы на этапе компиляции предотвращать возможные проблемы с безопасностью. Цель механизмов безопасности в Rust — устранение проблем с памятью и потоками, характерных для C. Основные концепции безопасности включают в себя:

1. Владение. Управляет тем, как программа распоряжается памятью, предотвращая чтение неинициализированной памяти и висячие указатели. В Rust значение имеет единственного владельца — переменную. При выходе переменной из области видимости значение освобождается. Передача переменной сопровождается передачей владения, и после этого первоначальная переменная становится недоступной.

2. Заимствование. Для совместного использования значения без передачи владения используется механизм заимствования, который позволяет создавать ссылки и передавать их другим переменным. Rust также поддерживает множественные неизменяемые ссылки, предотвращая конфликты данных и нежелательные эффекты.
3. Время жизни. Определяет области действия ссылок в программе. Эта особенность в Rust включает набор универсальных шаблонов, описывающих взаимосвязи между ссылками. Компилятор связывает каждую заемную ссылку с конкретным временем жизни, отслеживая ограничения, чтобы гарантировать, что время жизни ссылки будет достаточно для её использования.

Однако, Python и Rust требуют связки между собой, аналогично связке фронтенд и бекенд частей в WEB-приложениях. Для этого в представленном исследовании используется фреймворк Maturin, основанный на технолигии PyO3.

Технология PyO3 предоставляет мост между Rust и Python, основанный на Python/C программном интерфейсе. Таким образом, PyO3 имеет низкоуровневые привязки к программному интерфейсу языка программирования Python в своей основе. Кроме того, возникают высокоуровневые привязки для безопасной работы с объектами Python, а для определения классов и функций Python в коде Rust используются трейты PyClass и набор протокольных трейтов для поддержки объектных протоколов, то есть, магических методов из языка программирования Python. Поскольку реализация PyClass требует большого количества шаблонного кода, используются специальные макросы.

4.2 Алгоритмы

Эффективность и долгосрочная жизнеспособность программного комплекса в значительной степени предопределяются корректностью, ясностью и

архитектурной целостностью его алгоритмического ядра и технологического основания. Выдающиеся алгоритмические решения характеризуются не только своей функциональной полнотой, но и такими качественными свойствами, как предсказуемость вычислительной сложности, минимальное потребление критических ресурсов и адаптивность к изменяющимся условиям эксплуатации. Стратегия «Разделяй и властвуй», является классическим образцом подхода, который не только предлагает элегантный путь для решения сложных задач через их рекурсивную декомпозицию, но и фундаментально закладывает основу для эффективного распараллеливания вычислений, что является критически важным в контексте современных многопоточных и распределенных систем. Не менее важен принцип инкапсуляции и сокрытия сложной внутренней реализации алгоритма за стабильным и четко определенным программным интерфейсом. Такой подход не только абстрагирует потребителя от ненужных деталей, обеспечивая тем самым снижение когнитивной нагрузки на разработчика, но и создает предпосылки для последующей оптимизации или даже кардинальной замены алгоритмической реализации без необходимости модификации зависимых модулей системы. Данный подход напрямую соотносится с фундаментальными принципами модульности и единственной ответственности, которые значительно облегчают процессы верификации и тестирования программного обеспечения, поскольку изолированный алгоритм может быть всесторонне проверен с помощью комплекса модульных тестов в строго контролируемом окружении.

В журнале «Вычислительная математика и математическая физика» в статье [44] А. В. Иванисовым и В. К. Полищуком излагается численный метод, позволяющий находить корни полинома практически с любого начального приближения. При этом, на тестах алгоритм проявляет себя эффективнее, чем метод касательных Ньютона и его различные модификации. Если отметить более точно, то он является обобщением метода Ньютона, а при некоторых параметрах и вовсе переходит в него. Классические численные методы не являются универсальным, и все чаще на их смену при решении некоторых задач приходят алгоритмы машинного обучения.

В основе итерационного метода, предложенного Иванисовым и Полищуком, лежит идея о построении вспомогательного полинома $P_m(z)$, для чего требуется определить два параметра из множества целых положительных чисел m, p, при этом $p \leqslant m$. Если $p = m = 1$, то метод преображается в итерационный алгоритм Ньютона.

Опишем действие алгоритма последовательностью шагов:

1. Выбрать точность нахождения корня φ.
2. Получить случайным образом начальное приближение z_0.
3. Чтобы обеспечить максимальную скорость сходимости метода к корню, следует выбирать значение m в точности совпадающим со старшей степенью полинома $P^n(z)$, а за $p-$ показатель кратности предполагаемого корня; если таковая кратность не известна, то достаточно положить $p = 1$.
4. Найти значение константы
$$\chi = \sqrt{\frac{(m-1)(m-p)}{p}}.$$
6. Если $P^n(z_0) \neq 0$, то вычислить значение функций:
$$g = \frac{dP^n(z_0)}{dz}$$
$$h = \frac{d^2P^n(z_0)}{dz^2}$$
$$q = \sqrt{g^2 - \frac{mhP^n(z_0)}{m-1}}$$
$$G = \frac{g}{P^n(z_0)}$$
$$H = \frac{h}{P^n(z_0)}$$
$$Q = \sqrt{G^2 - \frac{mH}{m-1}}.$$
7. Найти следующее приближение z_1 по формуле:
$$z_1 = z_0 - \frac{m}{G + \chi Q}.$$
8. Взять за начальное приближение $z_0 = z_1$, повторить шаги шесть и семь до тех пор, пока не выполнится оценка $P^n(z_1) > \varphi$.

К сильным сторонам алгоритма можно отнести:

– высокую скорость работы и линейную сложность;
– сходимость к корню практически с любого начального приближения, за исключением случая кратных корней, которые могут располагаться на границах областей вспомогательных полиномов.

Для улучшения работы итерационного алгоритма предлагается использовать его модификацию, а именно, получить начальное приближение итерационным алгоритмом, а затем передать найденное приближение корня в качестве начальной точки $\overline{z_0}$ для оптимизации следующей целевой функции:

$$f(z) = |P^n(z)|^2.$$

Для решения этой задачи используется алгоритм Adam [55], при этом, вычисление градиента целевой функции $f(z)$ в точке z_0 производится методом конечных разностей, а именно, по следующей формуле:

$$\nabla f(z)|_{z=z_0} = \nabla f(x+iy)|_{x=x_0,y=y_0} = \frac{1}{2\varphi}\begin{pmatrix} f(x_0+\varphi+iy_0) - f(x_0-\varphi+iy_0) \\ f(x_0+i(y_0+\varphi)) - f(x_0+i(y_0-\varphi)) \end{pmatrix}.$$

В таблицах (1) и (2) представлены результаты запуска алгоритмов: алгоритма оптимизации Adam(Adam), итерационного метода Иванисова-Полищука(IP) и модификации итерационного метода Иванисова-Полищука, использующей для оптимизации целевой функции алгоритм Adam (Combine). В каждой таблице в столбце «n» указана степень полинома из выборки, а в столбце «total» представлено количество полиномов, в каждом классе. В столбцах алгоритмов отмечено количество полиномов для которых удалось найти корни. Результаты получены при параметрах: точность $-\varphi = 1e-4$, максимальное число итераций метода Иванисова-Полищука $-$ 20, максимальное число итераций для алгоритма Adam $-$ 10 000 штук, лернинг рейт алгоритма Adam -0.01.

В таблице (3) представлено итоговое сравнение алгоритмов. Строки таблицы $K1$ и $K2$ содержат информацию об итоговом тестировании алгоритмов на выборке полиномов, сформированной определенным образом, а именно, категория $K1-$ полиномы, алгебраическая кратность корней которых может соответствовать степени полинома; категория $K2$ состоит из полиномов, для которых кратность одного из корней не может быть более двух.

Таблица 1 — Результаты для выборки, состоящей из полиномов, кратность корней которых может совпадать со степенью полинома

n	IP	Adam	Combine	total
5	9	0	9	108
10	0	0	0	108
20	34	4	44	108
30	20	0	36	108
40	17	7	25	108
50	29	3	35	108
all	109	14	149	648

Таблица 2 — Результаты для выборки, состоящей из полиномов кратность корней которых не может быть больше двух

n	IP	Adam	Combine	total
5	36	0	36	108
10	14	14	27	108
20	0	0	0	108
30	33	23	44	108
40	17	24	33	108
50	24	0	24	108
all	124	61	164	648

Таблица 3 — Итоговое сравнение алгоритмов

	IP	Adam	Combine	total
K1	109	14	149	648
K2	124	61	164	648

Анализ результатов, приведенных в таблице (3), позволяет сделать вывод, что модификация алгоритма показывает себя лучше алгоритмов по отдельности. Оценка эффективности модификации итерационного алгоритма Иванисова-Полищука по сравнению с исходной версией алгоритма Иванисова-Полищука проводится на сбалансированной выборке,

сгенерированной случайным образом, поэтому ее можно вычислить:

$$\frac{(164 + 149) - (124 + 109)}{648 + 648} \cdot 100\% = \frac{80}{1296} \cdot 100\% \approx 6.17\%,$$

с точностью до двух знаков после запятой.

4.3 Выводы

В представленной главе обоснован выбор мультиязычной монолитной архитектуры программного комплекса; проведен сравнительный анализ между высокоуровневыми языками программирования C/C++ и Rust для реализации «вычислительно-нагруженного» функционала. Произведен выбор в пользу именно языка программирования Rust в виду ключевых концепций, заложенных в дизайн языка: владение, заимствование, время жизни, гарантирующих безопасность при работе с памятью на этапе компиляции. Для реализации не вычислительно нагруженного функционала выбран язык программирования Python с его библиотеками и фреймворками, позволяющими использовать Rust-код. Разработан алгоритм поиска корней полиномов, основанный на комбинировании алгоритмов Иванисова-Полищука и Adam. Представленное сравнение результатов работы алгоритмов показало эффективность комбинированного алгоритма на величину порядка 6.%.

Заключение

В диссертации решена актуальная задача повышения предсказательной способности аппаратов, моделирующих динамические системы. Проведенные исследования позволили получить следующие результаты:

1. Проведен анализ существующих методов моделирования динамических систем. В результате анализа выявлена необходимость в обобщении похожих, но не одинаковых результатов и методов моделирования динамических систем с учетом возникновения аномальных явлений.
2. Сформулирована постановка задачи математического моделирования аномальных явлений в динамических системах как разработка метода формализации для описания энергетического обмена между конечными объемами, с учетом измеримости энергии.
3. Для решения задачи обобщения существующих методов исследований, связанных с возникновением волн-убийц не только в гидродинамических системах, но и в достаточно широком классе динамических систем, предложен аппарат, позволяющий рассматривать волны-убийцы в качестве частного случая возникновения аномального явления в динамической системе, а именно, разработан математический аппарат, классифицирующий динамические системы, позволяющий проводить анализ динамических систем и представлять оценку динамики путем отслеживания энергетического обмена, который позволил получить необходимые условия существования аномальных явлений и достаточные условия отсутствия возникновения аномальных явлений в динамических системах.
4. Разработан метод исследования произвольных динамических систем, позволяющий оценить возможность существования аномальных явлений в динамических системах. Продемонстрировано применение метода при вычислении характеристических оценок динамики систем в областях:

гидродинамика, магнитная гидродинамика, теория пластичности, динамика мнений, архитектура программного обеспечения.

5. Разработан программный комплекс, включающий в себя реализацию алгоритма и численных методов, позволяющий производить вычислительные эксперименты с разными конфигурациями динамических систем. Методы и алгоритмы, разработанные и использованные в рамках диссертационной работы, реализованы на языках программирования Python или Rust, использовались следующие библиотеки и фреймворки: Maturin, NumPy, Pandas, Matplotlib, SciPy, Rayon. Программная реализация алгоритмов оптимизирована для использования на многопоточных системах, разработан программный интерфейс для удобного проведения изучения и анализа динамических систем.
6. Осуществлена валидация разработанного программного комплекса путем проведения ручного тестирования программы на корректное поведение. Валидация численных методов и алгоритмов произведена методом сравнения результатов работы, полученных при использовании разработанного алгоритма с результатами, полученными аналогичными алгоритмами из математических систем MATLAB и Wolfram Mathematica.
7. Теоретический анализ аналитических и численных решений позволили установить: продемонстрирована взаимосвязь между возникновением аномалий в эффекте Портевена-Ле Шателье и его выраженностью у разных сплавов металлов зафиксировано явление инверсии магнитного поля с некоторой периодичностью, отключение внешнего магнитного поля не приводит к затуханию магнитогидродинамического процесса внутри системы, при быстром вращении слоя внешнее магнитное поле и рельеф донной поверхности оказывают несущественное влияние на динамику процесса внутри жидкого объёма, а при малых значениях параметра Кориолиса внешнее магнитное поле совместно с изменением рельефа донной поверхности приводят к возникновению неустойчивых состояний жидкого слоя.

Результаты работы позволяют расширить представление об устройстве динамических систем, а также доказывают существование аномалий в некоторых видах динамических систем. Продемонстрировано существование и возникновение аномалий в предметных областях, на первый взгляд совершенно не связанных друг с другом. Таким образом, достигаются поставленные цели диссертационной работы. Полученные результаты могут быть востребованы для дальнейшего развития изучения устройства динамических систем и для выявления большего количества междисциплинарных связей, позволяющих конструктивно перенести часть результатов из одной предметной области в другую.

В дальнейшем диссертационное исследование может быть развито в представлении достаточных условий возникновения аномалий в динамической системе, что позволит сформулировать универсальный набор практик прогнозирования возникновения аномальных явлений. При этом открытым остается вопрос о связи между топологией динамической системы и частотой возникновения аномальных явлений, на основе изучения которого возможна разработка новых подходов и алгоритмов работы с многомерными временными рядами.

Список литературы

1. *Дорофеева Ю. А.* ОБЗОР ДИНАМИК МНЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ СОЦИАЛЬНЫХ СООБЩЕСТВ // ИВД. — 2020. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obzor-dinamik-mneniy-razlichnyh-sotsialnyh-soobschestv.

2. *Захаров В. Е.*, *Шамин Р. В.* О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ. — 2010. — Т. 91. — С. 62—65. — URL: https://doi.org/10.1134/S0021364010020025.

3. *Куркин А.А.*, *Пелиновский Е.Н.* Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. — 2016.

4. *Трусов П. В.*, *Чечулина Е. А.* Прерывистая текучесть: физические механизмы, экспериментальные данные, макрофеноменологические модели. — 2014. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/preryvistaya-tekuchest-fizicheskie-mehanizmy-eksperimentalnye-dannye-makrofenomenologicheskie-modeli.

5. *Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Вычислительная математика и математическая физика. — 2008. — Т. 48. — С. 882—898.

6. *Шамин Р.В.*, *Горленко А.В.*, *Смирнова А.И.* Вопросы устойчивости волн-убийц // Вычислительные технологии. — 2013.

7. *Шамин Р.В.*, *Юдин А.В.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН-УБИЙЦ // Доклады Академии наук. — 2013. — URL: https://doi.org/10.7868/S0869565213050228.

8. *Юшков Е.В.*, *Лукин А.С.*, *Соколов Д.Д.* МЕЛКОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ ПОДАВЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СПИРАЛЬНОСТИ В ДИНАМО-МОДЕЛИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ // ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕН-

-ТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. — 2020. — Т. 157, № 6. — С. 1108—1119. — URL: https://doi.org/10.31857/S0044451020060103.

9. *Ababkov Nikolay*, *Danilov Vladimir*, *Smirnov Alexander*, *Parhomenko Vladimir*. Formation of zones of stable deformation localization in welded joints of structural steel, characteristics of non-destructive testing // PHYSICAL MESOMECHANICS OF CONDENSED MATTER: Physical Principles of Multiscale Structure Formation and the Mechanisms of Nonlinear Behavior: MESO2022. — 2023. — Vol. 2899. — URL: https://doi.org/10.1063/5.0163404.

10. *Abbas S.Z.*, *Khan M. Ijaz*, *Kadry S.*, *Khan W.A.*, *Israr-Ur-Rehman M.*, *Waqas M.* Fully developed entropy optimized second order velocity slip MHD nanofluid flow with activation energy // Computer Methods and Programs in Biomedicine. — 2020. — Vol. 190. — URL: https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105362.

11. *Abderrahmane Aissa*, *Qasem Naef A. A.*, *Younis Obai*, *Marzouki Riadh*, *Mourad Abed*, *Shah Nehad Ali*, *Chung Jae Dong*. MHD Hybrid Nanofluid Mixed Convection Heat Transfer and Entropy Generation in a 3-D Triangular Porous Cavity with Zigzag Wall and Rotating Cylinder // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 5. — URL: https://doi.org/10.3390/math10050769.

12. *Ahmed Sameh E.*, *Raizah Zehba*, *Arafa Anas A.M.*, *Hussein Sameh A.* FEM treatments for MHD highly mixed convection flow within partially heated double-lid driven odd-shaped enclosures using ternary composition nanofluids // International Communications in Heat and Mass Transfer. — 2023. — Vol. 145. — P. 106854. — URL: https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2023.106854.

13. *Akmeemana Lahiru*, *Attanayake Chamodya*, *Faiz Husni*, *Wickramanayake Sandareka*. GAL-MAD: Towards Explainable Anomaly Detection in Microservice Applications Using Graph Attention Networks. — 2025. — arXiv: 2504.00058 [cs.SE]. — URL: https://arxiv.org/abs/2504.00058.

14. *Ali Bagh*, *Hussain Sajjad*, *Nie Yufeng*, *Hussein Ahmed Kadhim*, *Habib Danial*. Finite element investigation of Dufour and Soret impacts on MHD rotating flow of Oldroyd-B nanofluid over a stretching sheet with double diffusion Cattaneo Christov heat flux model // Powder Technology. — 2021. — Vol. 377. — P. 439–452. — URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2020.09.008.

15. *Alipour N.*, *Jafari B.*, *Hosseinzadeh K.* Optimization of wavy trapezoidal porous cavity containing mixture hybrid nanofluid (water/ethylene glycol Go–Al2O3) by response surface method // Sci Rep. — 2023. — Vol. 13. — URL: https://doi.org/10.1038/s41598-023-28916-2.

16. *Amdad Chowdury*, *Wonkeun Chang*. Rogue wave fission // Phys. Rev. Res. — 2021. — Vol. 3. — P. L032060. — URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.L032060.

17. *Atkey Robert*. Polynomial Time and Dependent Types // Proceedings of the ACM on Programming Languages. — 2024. — Vol. 8, POPL. — P. 2288–2317. — ISSN 2475-1421. — DOI: 10.1145/3632918. — URL: http://dx.doi.org/10.1145/3632918.

18. *Avila Marc*, *Barkley Dwight*, *Hof Björn*. Transition to Turbulence in Pipe Flow // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2023. — Vol. 55. — P. 575–602. — URL: https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120720-025957.

19. *Bauer Andrej*, *Haselwarter Philipp G.*, *Lumsdaine Peter LeFanu*. A general definition of dependent type theories. — 2020. — arXiv: 2009.05539. — URL: https://arxiv.org/abs/2009.05539.

20. *Bernardo Carmela*, *Altafini Claudio*, *Proskurnikov Anton*, *Vasca Francesco*. Bounded confidence opinion dynamics: A survey // Automatica. — 2024. — Vol. 159. — P. 111302. — URL: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2023.111302.

21. *Beta Carsten*, *Edelstein-Keshet Leah*, *Gov Nir*, *Yochelis Arik*. From actin waves to mechanism and back: How theory aids biological understanding // eLife. — 2023. — Vol. 12. — URL: https://doi.org/10.7554/eLife.87181.

22. *Bhatti M.M.*, *Marin M.*, *Ellahi R.* Insight into the dynamics of EMHD hybrid nanofluid (ZnO/CuO-SA) flow through a pipe for geothermal energy applications // J Therm Anal Calorim. — 2023. — Vol. 148. — P. 14261–14273. — URL: https://doi.org/10.1007/s10973-023-12565-8.

23. *Bludov Yu. V.*, *Konotop V. V.*, *Akhmediev N.* Matter rogue waves // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 80. — URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.033610.

24. *Bo Yang Jianke Yang.* Partial-rogue waves that come from nowhere but leave with a trace in the Sasa-Satsuma equation // Physics Letters A. — 2023. — Vol. 458. — URL: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2022.128573.

25. *Brij Mohan*, *Sachin Kumar.* Rogue-wave structures for a generalized (3+1)-dimensional nonlinear wave equation in liquid with gas bubbles // Physica Scripta. — 2024. — Vol. 99, no. 10. — URL: https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad7cd9.

26. *Brindley B. J.*, *Worthington Peter J.* Yield-point phenomena in substitutional alloys // International Materials Reviews. — 1970. — Vol. 15. — P. 101–114. — URL: https://doi.org/10.1179/mtlr.1970.15.1.101.

27. *Brule Stephane*, *Enoch Stefan*, *Guenneau Sebastien.* On the possibility of seismic rogue waves in very soft soils // arXiv: Geophysics. — 2020. — URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2004.07037.

28. *Das S. Patra R. R. Jana R. N.* Hydromagnetic Oscillatory Reactive Flow through a Porous Channel in a Rotating Frame Subject to Convective Heat Exchange under Arrhenius Kinetics // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2021. — Vol. 94, no. 3. — P. 702–713. — URL: https://doi.org/10.1007/s10891-021-02347-0.

29. *Debata S.*, *Das T.*, *Dey J.*, *Singh D.P.*, *Vempati S.*, *Ghosh S.* Flow of Medium Constituent with Charged Magnetic Particles in Presence of External Magnetic Field // Proceedings of 28th National Conference on Condensed Matter Physics. — 2021. — P. 143–150. — URL: https://doi.org/10.1007/978-981-16-5407-7_18.

30. *Dong Yucheng*, *Zhan Min*, *Kou Gang*, *Ding Zhaogang*, *Liang Haiming*. A survey on the fusion process in opinion dynamics // Information Fusion. — 2018. — Vol. 43. — P. 57–65. — URL: https://doi.org/10.1016/j.inffus.2017.11.009.

31. *Doostmohammadi A.*, *Shendruk T.*, *Thijssen K.* Onset of meso-scale turbulence in active nematics // Nature Communications. — 2017. — Vol. 8. — URL: https://doi.org/10.1038/ncomms15326.

32. *Dudley J.M.*, *Genty G.*, *Mussot A.* Rogue waves and analogies in optics and oceanography // Nat Rev Phys. — 2019. — Vol. 1. — P. 675–689. — URL: https://doi.org/10.1038/s42254-019-0100-0.

33. *Dysthe K.*, *Krogstad H.E.*, *Müller P.* Oceanic Rogue Waves // ANNUAL REVIEW OF FLUID MECHANICS. — 2008. — Vol. 40. — P. 287–310. — URL: https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.40.111406.102203.

34. *Eskandari Zohreh*, *Avazzadeh Zakieh*, *Ghaziani Reza*, *Li Bo.* Dynamics and bifurcations of a discrete-time Lotka–Volterra model using nonstandard finite difference discretization method. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2022. — Vol. 48, no. 7. — P. 7197–7212. — URL: https://doi.org/10.1002/mma.8859.

35. *F.H. Busse.* Homogeneous Dynamos in Planetary Cores and in the Laboratory // Geomagnetism and Aeronomy. — 2000. — Vol. 32, no. 5. — P. 383–408. — URL: https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.32.1.383.

36. *Fraiman Nicolas*, *Lin Tzu-Chi*, *Olvera-Cravioto Mariana.* Opinion dynamics on directed complex networks // ArXiv. — 2022. — Vol. abs/2209.00969. — URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.00969.

37. *Gangadhar K.*, *Lakshmi K. Bhanu*, *Kannan T.*, *Chamkha Ali J.* Bioconvective magnetized oldroyd-B nanofluid flow in the presence of Joule heating with gyrotactic microorganisms // Waves in Random and Complex Media. — 2025. — Vol. 35, no. 2. — P. 3257–3277. — URL: https://doi.org/10.1080/17455030.2022.2050441.

38. *Ganshin A. N.*, *Efimov V. B.*, *Kolmakov G. V.*, *Mezhov-Deglin L. P.*, *McClintock P. V. E.* Observation of an inverse energy cascade in developed acoustic turbulence in superfluid helium // Physical review letters. — 2008. — Vol. 101. — URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.065303.

39. *Guo Lijuan*, *He Jingsong*, *Mihalache Dumitru.* Rational and semi-rational solutions to the asymmetric Nizhnik–Novikov–Veselov system // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2021. — Vol. 54, no. 9. — P. 095703. — URL: https://doi.org/10.1088/1751-8121/abd268.

40. *Gurchenkov Anatoly A.*, *Matveev Ivan A.* Dynamics of Fluids in the Cavity of a Rotating Body: A Review of Analytical Solutions // Physics. — 2024. — Vol. 6, no. 1. — P. 426–455. — URL: https://doi.org/10.1088/1873-7005/abd8dc.

41. *Hayat T.*, *Khan M.* Homotopy Solutions for a Generalized Second-Grade Fluid Past a Porous Plate. // Nonlinear Dyn. — 2005. — Vol. 42. — P. 395–405. — URL: https://doi.org/10.1007/s11071-005-7346-z.

42. *Hayat T.*, *Qayyum S.*, *Shehzad S.A.*, *Alsaedi A.* Simultaneous effects of heat generation/absorption and thermal radiation in magnetohydrodynamics (MHD) flow of Maxwell nanofluid towards a stretched surface // Results in Physics. — 2017. — Vol. 7. — P. 562–573. — URL: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2016.12.009.

43. *Hussain Shafqat*, *Aly Abdelraheem M.*, *Öztop Hakan F.* Magneto-bioconvection flow of hybrid nanofluid in the presence of oxytactic bacteria in a lid-driven cavity with a streamlined obstacle // International Communications in Heat and Mass Transfer. — 2022. — Vol. 134. — P. 106029. — URL: https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106029.

44. *Ivanisov A.V.*, *Polishchuk V.K.* A method of finding the roots of polynomials which converge for any initial approximation // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1985. — Vol. 25, no. 3. — P. 1–7. — URL: https://doi.org/10.1016/0041-5553(85)90066-7.

45. *Jia-Xue Niu*, *Rui Guo*, *Jian-Wen Zhang*. Solutions on the periodic background and transition state mechanisms for the higher-order Chen-Lee-Liu equation // Wave Motion. — 2023. — Vol. 123. — URL: http://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2023.103233.

46. *Jiguang Rao*, *Jingsong He*, *Yi Cheng*. The Davey–Stewartson I equation: doubly localized two-dimensional rogue lumps on the background of homoclinic orbits or constant // Letters in Mathematical Physics. — 2022. — Vol. 112, no. 75. — URL: http://doi.org/10.1007/s11005-022-01571-w.

47. *Jing-Kui Zhang*, *Ben-Wen Li*, *Hua Dong*, *Xiao-Hong Luo*, *Huan Lin*. Analysis of magnetohydrodynamics (MHD) natural convection in 2D cavity and 3D cavity with thermal radiation effects // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2017. — Vol. 112. — P. 216–223. — URL: https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.04.105.

48. *Kabamba Herve Mbikayi*, *Khouzam Matthew*, *Dagenais Michel*. Advanced Strategies for Precise and Transparent Debugging of Performance Issues in In-Memory Data Store-Based Microservices. — 2023. — arXiv: 2311.11230 [cs.DC]. — URL: https://arxiv.org/abs/2311.11230.

49. *Kazankov V.*, *Kholodova s*, *Peregudin Sergey*. Mathematical Modelling of Anomalous Dynamic Processes in Geomedia // Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. — 2022. — P. 63–74. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-99504-1_8.

50. *Kazankov V. K.*, *Kholodova S. E.* Retrospective Analysis Methods in the Study of the Existence of Anomalous Processes in Geodynamic Systems // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes—2022. — 2023. — P. 101–109.

51. *Kazankov V. K.*, *Peregudin S. I.*, *Kholodova S. E.* Mathematical Modeling of Geophysical Processes in a Layer of Electrically Conductive Liquid of Variable Depth // Springer International Publishing. — 2023. — P. 331–341. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-16575-7_32.

52. *Kazankov V. K.*, *Peregudin S. I.*, *Kholodova S. E.* Mathematical Modeling of Magnetohydrodynamic Processes in the Ocean // Processes in GeoMedia—Volume VI. — 2023. — P. 627–632. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-16575-7_55.

53. *Kazankov V.K. Shmeleva A.G. Zaitseva E.V.* Unstable plastic flow in structural materials: time series for analysis of experimental data // Materials Physics and Mechanics. — 2022. — Vol. 48, no. 2. — P. 208–216. — URL: https://doi.org/10.18149/MPM.4822022_6.

54. *Kholodova S. E.* Dynamics of a rotating layer of an ideal electrically conducting incompressible fluid // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2008. — Vol. 48, no. 5. — P. 834–849. — URL: https://doi.org/10.1134/S0965542508050114.

55. *Kingma Diederik P.*, *Ba Jimmy.* Adam: A Method for Stochastic Optimization. — 2014. — arXiv: 1412.6980. — URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980.

56. *Knobloch Edgar*, *Yochelis Arik.* Emergence of rogue-like waves in a reaction-diffusion system: Stochastic output from deterministic dissipative dynamics // Chaos. — 2024. — Vol. 34. — URL: https://doi.org/10.1063/5.0205658.

57. *Knobloch Edgar*, *Yochelis Arik.* Front propagation and global bifurcations in a multivariable reaction-diffusion model // Chaos. — 2023. — Vol. 33. — URL: https://doi.org/10.1063/5.0147803.

58. *Knobloch Edgar*, *Yochelis Arik.* Instability mechanisms of repelling peak solutions in a multi-variable activator–inhibitor system // Chaos. — 2022. — Vol. 32. — URL: https://doi.org/10.1063/5.0125535.

59. *Knuth Donald E.* Mathematics and Computer Science: Coping with Finiteness // Science. — 1976. — Vol. 194, no. 4271. — P. 1235–1242. — URL: https://doi.org/10.1126/science.194.4271.1235.

60. *Konovalchikova Elena N.*, *Dorofeeva Yu.A.* Opinion Dynamics Models with Noise. — 2020. — URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:235419863.

61. *Kopp M I*, *Tur A V*, *Yanovsky V V.* Magnetic convection in a nonuniformly rotating electrically conductive medium in an external spiral magnetic field // Fluid Dynamics Research. — 2021. — Vol. 53, no. 1. — URL: https://doi.org/10.1088/1873-7005/abd8dc.

62. *Kopp M. I. Yanovsky V. V.* Investigating the Effect of Gravity Modulation on Weakly Nonlinear Magnetoconvection in a Nonuniformly Rotating Nanofluid Layer // East European Journal of Physics. — 2023. — Vol. 3. — P. 207–222. — URL: https://doi.org/10.1088/1873-7005/abd8dc.

63. *KOVAL R.Yu.* Method of Increasing the Efficiency of High-Load Systems based on Microservices Architecture // Kibernetika i vyčislitelnaâ tehnika. — 2024. — Nov. — Vol. 217. — P. 24–37. — DOI: 10.15407/kvt217.03.024.

64. *Krishna M. Veera.* Hall and Ion Slip Effects on the MHD Flow of Casson Hybrid Nanofluid Past an Infinite Exponentially Accelerated Vertical Porous Surface // Waves in Random and Complex Media. — 2021. — Vol. 34, no. 5. — P. 4658–4687. — URL: https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1998727.

65. *Krishna M. Veera*, *Ahammad N. Ameer*, *Chamkha Ali J.* Radiative MHD flow of Casson hybrid nanofluid over an infinite exponentially accelerated vertical porous surface // Case Studies in Thermal Engineering. — 2021. — Vol. 27. — URL: https://doi.org/10.1016/j.csite.2021.101229.

66. *Lakka Mounika.* Demystifying Microservices Architecture: Breaking the Monolith // Journal of Computer Science and Technology Studies. — 2025. — Vol. 7, no. 7. — P. 813–822. — DOI: 10.32996/jcsts.2025.7.7.87. — URL: https://al-kindipublishers.org/index.php/jcsts/article/view/10384.

67. *Lashkin V. M.*, *Cheremnykh O. K.* Nonlinear internal gravity waves in the atmosphere: Rogue waves, breathers and dark solitons // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2024. — Vol. 130. — URL: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107757.

68. *Lebedkina Tatiana*, *Zhemchuzhnikova Daria*, *Lebyodkin Mikhail*. Correlation versus randomization of jerky flow in an AlMgScZr alloy using acoustic emission. — 2021. — URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.07305.

69. *Lebyodkin Mikhail*, *Lebedkina Tatiana*, *Brechtl Jamieson*, *Liaw Peter*. Serrated Flow in Alloy Systems. — 2021. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-77641-1_11.

70. *Lei Gao*, *Qiang Wu*, *Yulong Cao*, *Wabnitz Stefan*, *Tao Zhu*. Optical polarization rogue waves and their identifications // Journal of Physics: Photonics. — 2020. — Vol. 2. — URL: https://doi.org/10.1088/2515-7647/ab9bf7.

71. *Leonov G.A.*, *Kuznetsov N.V.*, *Kiseleva M.A.* Hidden oscillations in mathematical model of drilling system actuated by induction motor with a wound rotor // Nonlinear Dyn. — 2014. — Vol. 77. — P. 277–288. — URL: https://doi.org/10.1007/s11071-014-1292-6.

72. *Li Sitai*, *Prinari Barbara*, *Biondini Gino*. Solitons and rogue waves in spinor Bose-Einstein condensates. // Physical review. E. — 2018. — Vol. 97 2–1. — P. 022221. — URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.L032060.

73. *Lijuan Guo*, *Amin Chabchoub*, *Jingsong He*. Higher-order rogue wave solutions to the Kadomtsev–Petviashvili 1 equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2021. — Vol. 426. — URL: http://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132990.

74. *Liu Jusheng*, *He Jian-jia*, *Qiu Zhiping*, *He Shengxue*. An opinion dynamics model based on affinity and social noise // Frontiers of Physics. — 2022. — Vol. 10. — URL: https://doi.org/10.3389/fphy.2022.1042900.

75. *Liu Fei-Yan Gao Yi-Tian Yu Xin*. Rogue-wave, rational and semi-rational solutions for a generalized (3+1)-dimensional Yu-Toda-Sasa-Fukuyama equation in a two-layer fluid // Nonlinear Dynamics. — 2023. — Vol. 111. — P. 3713–3723. — URL: https://doi.org/10.1007/s11071-022-08017-x.

76. *Lorenz Jan*. Continuous Opinion Dynamics under Bounded Confidence: A Survey. — 2007. — URL: https://doi.org/10.1142/S0129183107011789.

77. *Lü X., Chen SJ.* Interaction solutions to nonlinear partial differential equations via Hirota bilinear forms: one-lump-multi-stripe and one-lump-multi-soliton types. // Nonlinear Dyn. — 2021. — Vol. 103. — URL: https://doi.org/10.1007/s11071-020-06068-6.

78. *Lu Zhongyi, Delaney Declan, Li Tong, Lillis David.* Towards Building a Reputation-Based Microservices Trust Model Using Similarity Domains. — 2024. — July. — DOI: 10.5220/0012838000003753.

79. *Lv Na, Sun Jiaping, Zhang Runfa, Yuan Xuegang, Yue Yichao.* Nonlinear characteristics of various local waves on nonzero backgrounds of a (2+1)-dimensional generalized Kadomtsev–Petviashvili equation with variable coefficients // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2025. — Vol. 472. — P. 134501. — URL: https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134501.

80. *Maclane Saunders.* Categories for the Working Mathematician. — 1998.

81. *Maggi Kevin, Verdecchia Roberto, Scommegna Leonardo, Vicario Enrico.* Evolution of code technical debt in microservices architectures // Journal of Systems and Software. — 2025. — Vol. 222. — P. 112301. — URL: https://doi.org/10.1016/j.jss.2024.112301.

82. *Manikandan Kannan, Priya N. Vishnu, Senthilvelan M., Sankaranarayanan R.* Higher-order matter rogue waves and their deformations in two-component Bose–Einstein condensates // Waves in Random and Complex Media. — 2020. — Vol. 32. — P. 867–886. — URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.L032060.

83. *McAllister M. L., Draycott S., Adcock T. A. A., Taylor P. H., Bremer T. S. van den.* Laboratory recreation of the Draupner wave and the role of breaking in crossing seas // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Vol. 860. — P. 767–786. — URL: https://doi.org/10.1017/jfm.2018.886.

84. *MIKHAILOV E.A. KHASAEVA T.T. TEPLYAKOV I.O.* The emergence of contrast structures for galactic magnetic field: theoretical estimates and modeling on GPU // Proceedings of the Institute for System Programming

of the RAS (Proceedings of ISP RAS). — 2021. — Vol. 33, no. 6. — P. 253–264. — URL: https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2021-33(6)-18.

85. *Nugent Andrew*, *Gomes Susana N.*, *Wolfram Marie-Therese.* Opinion Dynamics with Continuous Age Structure // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2025. — URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.04319.

86. *Nuñez Ivonne*, *Rovetto Carlos*, *Cruz Edmanuel*, *Smolarz Andrzej*, *Concepcion Dimas*, *Cano Elia.* Design of a microservices-based architecture for residential energy efficiency monitoring // International Journal of Electronics and Telecommunications. — 2024. — P. 1089–1089. — URL: https://doi.org/10.24425/ijet.2024.152511.

87. *Onorato M.*, *Residori S.*, *U. Bortolozzo*, *Montina A.*, *Arecchi F.T.* Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts // Physics Reports. — 2013. — Vol. 528. — P. 47–89. — URL: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.03.001.

88. *Pelinovsky E.N.*, *Shurgalina E.G.*, *Sergeeva A.V.*, *Talipova T.G.*, *Grimshaw R.H.J.* Two-soliton interaction as an elementary act of soliton turbulence in integrable systems // Physics Letters A. — 2013. — Vol. 377. — P. 272–275. — URL: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2012.11.037.

89. *Pelinovsky Efim*, *Kharif Christian*, *Slunyaev Alexey.* Rogue waves in the ocean - review and progress // EGU General Assembly Conference Abstracts. — 2010. — P. 202. — (EGU General Assembly Conference Abstracts). — URL: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010EGUGA..12..202P.

90. *Peregudin S.I.*, *Peregudina E.S.*, *Kholodova S.E.* Mathematical Modeling of the Dynamics of a Rotating Layer of an Electrically Conducting Fluid with Magnetic Field Diffusion Effects // Processes in GeoMedia. — 2021. — Vol. 2. — P. 377–387. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-53521-6_41.

91. *Pineda M*, *Toral R*, *Hernández-García E.* Noisy continuous-opinion dynamics // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2009. — Vol. 2009, no. 08. — P08001. — URL: https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/08/P08001.

92. *Pineda Miguel*, *Toral Raul*, *Hernandez-Garcia Emilio.* The noisy Hegselmann-Krause model for opinion dynamics // The European Physical Journal B. — 2013. — Vol. 86. — URL: https://doi.org/10.1140/epjb/e2013-40777-7.

93. *Pineda Miguel*, *Toral Raul*, *Hernandez-Garcia Emilio.* The noisy Hegselmann-Krause model for opinion dynamics // The European Physical Journal B. — 2013. — Vol. 86. — URL: https://doi.org/10.1140/epjb/e2013-40777-7.

94. *Podduturi Santhosh.* AI for Microservice Monitoring and Anomaly Detection // International Journal of Emerging Trends in Computer Science and Information Technology. — 2025. — P. 192–211. — DOI: 10.56472/ICCSAIML25-125. — URL: https://www.ijetcsit.org/index.php/ijetcsit/article/view/199.

95. *Qin Boqin*, *Chen Yilun*, *Liu Haopeng*, *Zhang Hua*, *Wen Qiaoyan*, *Song Linhai*, *Zhang Yiying.* Understanding and Detecting Real-World Safety Issues in Rust // IEEE Transactions on Software Engineering. — 2024. — June. — Vol. PP. — P. 1–19. — DOI: 10.1109/TSE.2024.3380393.

96. *Qureshi Muhammad Amer*, *Hussain Shafqat*, *Sadiq Muhammad Adil.* Numerical simulations of MHD mixed convection of hybrid nanofluid flow in a horizontal channel with cavity: Impact on heat transfer and hydrodynamic forces // Case Studies in Thermal Engineering. — 2021. — Vol. 27. — P. 101321. — URL: https://doi.org/10.1016/j.csite.2021.101321.

97. *R. Muhammad*, *M.I. Khan*, *N.B. Khan*, *M Jameel.* Magnetohydrodynamics (MHD) radiated nanomaterial viscous material flow by a curved surface with second order slip and entropy generation // International Journal of Heat and

Mass Transfer. — 2020. — Vol. 189. — URL: https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2019.105294.

98. *Rao J.*, *Malomed B. A.*, *Mihalache D.*, *He J.* General higher—order breathers and rogue waves in the two-component long-wave–short-wave resonance interaction model // Studies in Applied Mathematics. — 2022. — Vol. 149. — P. 843–878. — URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.07356.

99. *Rao Jiguang*, *He Jingsong*, *Cheng yi.* The Davey–Stewartson I equation: doubly localized two-dimensional rogue lumps on the background of homoclinic orbits or constant // Letters in Mathematical Physics. — 2022. — Vol. 112. — URL: https://doi.org/10.1007/s11005-022-01571-w.

100. *Ravazzi Chiara*, *Dabbene Fabrizio*, *Lagoa Constantino*, *Proskurnikov Anton V.* Learning Hidden Influences in Large-Scale Dynamical Social Networks: A Data-Driven Sparsity-Based Approach, in Memory of Roberto Tempo // IEEE Control Systems Magazine. — 2021. — Vol. 41, no. 5. — P. 61–103. — URL: https://doi.org/10.1109/MCS.2021.3092810.

101. *Robinson J. M.*, *Shaw M. P.* Microstructural and mechanical influences on dynamic strain aging phenomena // International Materials Reviews. —. — Vol. 39, no. 3. — P. 113–122. — URL: https://doi.org/10.1179/imr.1994.39.3.113.

102. *Rodríguez Miguel.* Machine Learning-Based Anomaly Detection in Containerized Microservices Within DevOps Pipelines. — 2025.

103. *Sachin Kumar*, *Brij Mohan.* A novel and efficient method for obtaining Hirota's bilinear form for the nonlinear evolution equation in (n+1) dimensions // Partial Differential Equations in Applied Mathematics. — 2022. — Vol. 5. — URL: https://doi.org/10.1016/j.padiff.2022.100274.

104. *Shabir Ahmad*, *Sayed Saifullah*, *Arshad Khan*, *Abdul Wazwaz.* Resonance, fusion and fission dynamics of bifurcation solitons and hybrid rogue wave structures of Sawada–Kotera equation // Nonlinear Dynamics. — 2023. — Vol. 119. — URL: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107117.

105. *Shamin R.*, *Yudin Alexander.* Processes of concentration of energy in the formation of rogue waves // Nelineinaya Dinamika. — 2014. — P. 49–58. — URL: https://doi.org/10.20537/nd1401004.

106. *Shera C.A.* Whistling While it Works: Spontaneous Otoacoustic Emissions and the Cochlear Amplifier // JARO. — 2022. — Vol. 23. — P. 17–25. — URL: https://doi.org/10.1007/s10162-021-00829-9.

107. *Shundong Zhu*, *Shanshan Yin*, *Xin Li.* Degenerate soliton and breather solutions of the modified Korteweg–de Vries–Sine Gordon equation // Applied Mathematics Letters. — 2022. — Vol. 131. — URL: https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108070.

108. *Šimkanin J. J. Kyselica.* Transition from Laminar to Turbulent Dynamo: The Effect of Varying Prandtl Number // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. — 2020. — Vol. 115, no. 2. — P. 192–206. — URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.06929.

109. *Smagin V. P.*, *Semkin S. V.*, *Savchenko V. N.* Geomagnetic field variations induced by internal and surface waves in the four-layer model of the marine environment // Geomagnetism and Aeronomy. — 2014. — Vol. 54, no. 5. — P. 666–672. — URL: https://doi.org/10.1134/S0016793214040203.

110. *Steffensen Rasmus*, *Agnes Steinert*, *Smeur Ewoud Jan Jacob.* Non-Linear Dynamic Inversion with Actuator Dynamics: an Incremental Control Perspective // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2022. — Vol. 46, no. 4. — URL: https://doi.org/10.2514/1.G007079.

111. *Stenflo L.*, *Marklund M.* Rogue waves in the atmosphere // Journal of Plasma Physics. — 2010. — Vol. 76. — P. 293–295. — URL: https://doi.org/10.1017/S0022377809990481.

112. *Strogatz S. H.* Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. — 2018. — URL: https://doi.org/10.1201/9780429492563.

113. *Tapia Freddy*, *Mora Miguel Ángel*, *Fuertes Walter*, *Aules Hernán*, *Flores Edwin*, *Toulkeridis Theofilos*. From Monolithic Systems to Microservices: A Comparative Study of Performance // Applied Sciences. — 2020. — Vol. 10, no. 17. — ISSN 2076-3417. — DOI: 10.3390/app10175797. — URL: https://www.mdpi.com/2076-3417/10/17/5797.

114. *Titov V.V. Stepanov R.A. Sokoloff D.D.* The emergence of contrast structures for galactic magnetic field: theoretical estimates and modeling on GPU // Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS (Proceedings of ISP RAS). — 2020. — Vol. 130. — P. 253–264. — URL: https://doi.org/10.1134/S1063776120010100.

115. *Wang Xiu-Bin*, *Tian Shou-Fu*. Exotic vector freak waves in the nonlocal nonlinear Schrödinger equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2022. — Vol. 442. — URL: https://doi.org/10.1016/j.physd.2022.133528.

116. *Wu Xiao-Yu*, *Tian Bo*, *Liu Lei*, *Sun Yan*. Rogue waves for a variable-coefficient Kadomtsev–Petviashvili equation in fluid mechanics // Computers and Mathematics with Applications. — 2018. — Vol. 76, no. 2. — P. 215–223. — URL: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.12.021.

117. *Xing Lü*, *Yan-Fei Hua*, *Si-Jia Chen*, *Xian-Feng Tang*. Integrability characteristics of a novel (2+1)-dimensional nonlinear model: Painlevé analysis, soliton solutions, Bäcklund transformation, Lax pair and infinitely many conservation laws. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2021. — Vol. 95. — URL: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105612.

118. *Xiu-Bin Wang*, *Bo Han*. Characteristics of the breathers, rogue waves and soliton waves in a (2+1)-dimensional generalized Nizhnik–Novikov–Veselov equation // Modern Physics Letters B. — 2019. — Vol. 33, no. 3. — URL: http://doi.org/10.1142/S0217984919500143.

119. *Yin Peng*, *Zhang Wei*, *Yang Qiaofa*, *Liang Fei*, *Zhang Guodong*, *Xia Xianxi*, *Zhao Yanfen*, *Zhou Changyu*. Dynamic strain aging and microstructural damage mechanism of austenitic stainless steel under thermomechanical fatigue

in the temperature range of 250–400 °C // International Journal of Fatigue. — 2022. — Vol. 163. — P. 107111. — URL: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.107111.

120. *Zafarzade Z. Ataie E.* Capacity planning of a microservices-based image classification application using analytic modeling // Computing. — 2025. — Vol. 107. — P. 123. — DOI: 10.1007/s00607-025-01473-4.

121. *Zakharov V. E.*, *Shamin R. V.* Statistics of rogue waves in computer experiments // JETP Letters. — 2012. — Vol. 96. — P. 66–69. — URL: https://doi.org/10.1134/S0021364012130164.

122. *Zha Quanbo*, *Kou Gang*, *Zhang Hengjie*, *Liang Haiming*, *Chen Xia*, *Li Cong-Cong*, *Dong Yucheng.* Opinion dynamics in finance and business: a literature review and research opportunities // Financ Innov. — 2020. — Vol. 6. — URL: https://doi.org/10.1186/s40854-020-00211-3.

123. *Zhang Zhao*, *Yang Xiangyu*, *Li Biao.* Soliton molecules and novel smooth positons for the complex modified KdV equation // Applied Mathematics Letters. — 2020. — Vol. 103. — URL: https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106168.

124. *Zhang Zhao*, *Yang Xiangyu*, *Li Biao*, *Wazwaz Abdul-Majid*, *Guo Qi.* Generation mechanism of high-order rogue waves via the improved long-wave limit method: NLS case // Physics Letters A. — 2022. — Vol. 450. — URL: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2022.128395.

125. *Zhaqilao Wurile Bao X.* Rogue waves on the periodic wave background in the Kadomtsev–Petviashvili I equation // Nonlinear Dynamics. — 2023. — Vol. 111. — P. 18255–18266. — URL: https://doi.org/10.1007/s11071-023-08758-3.

126. *Zhifu Zou*, *Rui Guo.* The Riemann–Hilbert approach for the higher-order Gerdjikov–Ivanov equation, soliton interactions and position shift // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2023. — Vol. 124. — URL: http://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107316.

127. *Zuev L. B.* Chernov–Luders and Portevin–Le Chatelier deformations in active deformable media of different nature // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2017. — Vol. 58, no. 2. — P. 328–334. — URL: https://doi.org/10.1134/S0021894417020171.

Приложение А. Акт о внедрении результатов исследования

ООО «Тор»

Общество с ограниченной ответственностью
«Тор»

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов диссертации В.К. Казанкова на соискание ученой степени
кандидата технических наук
«Моделирование аномалий в динамических системах»

Настоящий акт удостоверяет, что результаты диссертационного исследования, выполненные Казанковым Владиславом Константиновичем в НИУ ИТМО по моделированию аномалий в динамических системах, представляют практический интерес для ООО «Тор» в части выявления и анализа аномальных артефактов в поведении решения уравнений электромагнитного поля в динамической постановке.

Подходы и методология, предложенные и разработанные В.К. Казанковым использовались при реализации параллельных вычислений в геометрических алгоритмах программы ELCUT, всестороннем функциональном тестировании программы.

Анализ энергетического обмена согласуется с устройством метода конечных элементов, который используется в программе ELCUT, поскольку процесс работы метода конечных элементов представим в качестве динамической системы, изучаемой в диссертационной работе.

Разработанные В.К. Казанковым методы прошли стадию проверки и могут быть использованы в продукте ООО «Тор» – программе ELCUT.

Директор ООО «Тор» к.т.н. Дубинский С.Д.

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 22, лит. Т, пом. 5Н.
Тел/факс: (812) 710-1659 info@tor.ru; сайт www.tor.ru
ИНН 7838461098, КПП 783801001, ОГРН 1117847248496, ОКПО 46899276, ОКАТО 40262564000, ОКВЭД 72.20.
Р/с 40702810739000006916 в филиале ОПЕРУ Банка ВТБ (ПАО) в Санкт-Петербурге, г. Санкт-Петербург,
к/с 30101810200000000704, БИК 044030704.

Приложение В. Свидетельство о регистрации программного комплекса

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2025665003

Программный комплекс для моделирования динамических систем и поиска аномалий

Правообладатель: ***Казанков Владислав Константинович (RU)***

Автор(ы): ***Казанков Владислав Константинович (RU)***

Заявка № **2025661727**
Дата поступления **14 мая 2025 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***09 июня 2025 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 0692e7a1ac300bf54f24501670bcca2026
Владелец: Зубов Юрий Сергеевич
Действителен с 10.07.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов